

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

Seien $n \in \mathbb{N}$ und S_n durch

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

definiert.

- (a) Berechnen Sie S_1, S_2, S_3 und S_4 .
- (b) Finden Sie eine Formel für S_n , und beweisen Sie diese mit Induktion.

Aufgabe 5.2

Beweisen Sie mit Induktion

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 5.3

Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

keine rationale Lösung besitzt.

Hinweis: Schreiben Sie die Gleichung als $(x-1)^2 = 3$ um.

Aufgabe 5.4

Wir definieren

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{und} \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ bzw. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ mit den üblichen Verknüpfungen (Addition und Multiplikation der Zahlen) ein Ring bzw. Körper ist.