# Übungsblatt 4

## Aufgabe 4.1

Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv, oder bijektiv sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

(a)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to [1,\infty) \\ x &\mapsto x^2+1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f\colon (0,\infty) &\to [0,1] \\ x &\mapsto \frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

(c) Es seien $a < b$ reelle Zahlen.

$$\begin{aligned} f\colon (0,1) &\to (a,b) \\ x &\mapsto (1-x)a + xb. \end{aligned}$$

## Aufgabe 4.2

Seien $A, B, C$ drei Mengen, und $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ zwei Abbildungen. Zeigen Sie

(a) wenn $f$ und $g$ injektiv sind, ist $g \circ f$ ebenfalls injektiv;

(b) wenn $f$ und $g$ surjektiv sind, ist $g \circ f$ ebenfalls surjektiv;

(c) wenn $g \circ f$ injektiv ist, ist $f$ ebenfalls injektiv. Muss auch $g$ injektiv sein?

## Aufgabe 4.3

(a) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

(b) Beweisen Sie

$$2^n > n^2 \quad \text{für} \quad n \geq 5.$$

## Aufgabe 4.4

Sei $F_n$ die $n$-te Fibonacci Zahl. Zur Erinnerung: die Fibonacci Zahlen sind definiert durch die Rekursion $F_1 = F_2 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^n - \varphi_2^n) \quad \text{für alle} \quad n \geq 1,$$

wobei

$$\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{und} \qquad \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

*Hinweis: Zeigen Sie, dass $\varphi_1$ und $\varphi_2$ die Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ sind, und daher $1 + \varphi_1 = \varphi_1^2$ und $1 + \varphi_2 = \varphi_2^2$ gelten.*