Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird M_n durch $M_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < \frac{1}{n}\right\}$ definiert. Dabei bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Beweisen Sie durch Widerspruch, dass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = \emptyset.$$

Aufgabe 3.2

Zeigen Sie, dass für beliebige Teilmegen A, B, C, D einer Menge M gilt:

(a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(b) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Aufgabe 3.3

Es sei f eine Abbildung der Menge M in die Menge N und $A, B \subseteq M$ sowie $C, D \subseteq N$. Die Bildmenge von A ist definiert als

$$f(A) = \{y \in N \,|\, \exists x \in A : f(x) = y\},$$

und die Urbildmenge von C ist definiert als

$$f^{-1}(C) = \{x \in M \,|\, f(x) \in C\}.$$

Zeigen Sie

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
Finden Sie ein Beispiel mit strikter Inklusion, d.h. $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$.

(c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{(-1)}(D)$.

Aufgabe 3.4

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung und $A \subseteq M, B \subseteq N$. Zeigen Sie

(a) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Finden Sie Beispiele, in dem die Inklusionen strikt sind.

Aufgabe 3.5

Beweisen Sie mit Induktion

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k = \frac{1}{4}\left[1 + (-1)^{n-1}(2n+1)\right].$$