

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1

Für zwei Mengen A und B heißt $A\Delta B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$ die symmetrische Differenz von A und B . Zeigen Sie:

- a) $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- b) $A \cup B = (A\Delta B) \Delta (A \cap B)$.

Aufgabe 2.2

Zeigen Sie die folgenden Mengengleichheiten:

- a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$.
- b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1)$.

Aufgabe 2.3

Es seien A, B, M Mengen mit $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$A \cup B = M \Leftrightarrow A^c \subseteq B.$$

Aufgabe 2.4

Es seien A, B und C Aussagen. Zeigen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen:

- a) $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C))$.
- b) $((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$.

Interpretieren Sie a) für die Aussagen A : 2 teilt n , B : 5 teilt n und C : 10 teilt n .

Aufgabe 2.5

Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Zeigen Sie anschließend für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$