Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1

Seien p und q Aussagen, und $P(x)$ und $Q(x)$ Aussageformen (d.h. für ein gegebenes x ist $P(x)$ eine Aussage). Drücken Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen mit Hilfe logischer Verknüpfungen und Quantoren aus.

a) „Wenn p gilt, dann folgt q, und wenn p nicht gilt, dann folgt ebenfalls q."

b) „Für alle x können $P(x)$ und $Q(x)$ nicht gleichzeitig zutreffen."

c) „Wenn für alle x die Aussage $P(x)$ wahr ist, dann gilt die Aussage q."

Wie würden Sie (formal und umgangssprachlich) ausdrücken, dass die jeweilige Aussage *nicht* gilt?

Hinweis: Die Negation von „$\forall x\colon P(x)$" ist „$\exists x\colon \neg P(x)$."

Aufgabe 1.2

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gegeben. Weiterhin sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ eine Funktion der vierten Ordnung. Dann existiert eine Konstante $M \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ eine der Beziehungen $f(x) \geq M$ oder $f(x) \leq M$ gilt.

(a) Formalisieren Sie die obige Aussage unter Verwendung von Quantoren.

(b) Formulieren Sie die Negation der in (a) formulierten Aussage.

(b) Beweisen Sie die in (a) formulierte Aussage.

Aufgabe 1.3

Gegeben seien die folgenden (vermeintlichen) Äquivalenzumformungen

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2+2}{2x-3} > \frac{3x}{2x-3} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 2 > 3x \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 3x + 2 > 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)(x-2) > 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x < 1) \vee (x > 2).
\end{aligned}$$

Sind die angegebenen Schlussfolgerungen korrekt und, wenn nicht, warum? Geben Sie gegebenenfalls die richtige Lösung an.

Aufgabe 1.4

Bestimmen Sie alle (reellen) Zahlen x, für die gilt:

a) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x-1}=1$,

b) $|x+1|-|x-1|=1$,

c) $x^3-x^2<2x-2$,

d) $\dfrac{2x-1}{x-1}<\dfrac{2x}{x-2}$.