Analysis I WS 2019/20
Kurztestbeispiele für 09.01.2020

Lösen Sie die (symmetrischen, antisymmetrischen) Gleichungen der vierten Ordnung:

(a) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0,$ (b) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0,$

(c) $2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 2 = 0,$ (d) $3x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0,$

(e) $3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 5x + 3 = 0,$ (f) $4x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 3x + 4 = 0.$

Musterlösung:

Symmetrische Gleichung:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Da $x = 0$ keine Lösung ist, können wir beide Seiten durch x^2 dividieren und erhalten

$$\begin{aligned} & x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0. \qquad (*) \end{aligned}$$

Wir setzen $y = x + \dfrac{1}{x}$. Daraus folgt

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \ \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Deswegen wird $(*)$ eine Gleichung in y,

$$(y^2 - 2) - 5y + 6 = 0 \ \Leftrightarrow\ y^2 - 5y + 4 = 0 \ \Leftrightarrow\ y = 1 \text{ oder } y = 4.$$

Für $y = 1$ folgt

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}.$$

Für $y = 4$ folgt

$$x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Antisymmetrische Gleichung:

$$3x^4 - x^3 - 8x^2 + x + 3 = 0.$$

Der Lösungsweg ist ähnlich. Wir dividieren beide Seiten durch x^2 und erhalten

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right) - 8 = 0. \qquad (**)$$

Wir setzen

$$z = x - \frac{1}{x} \ \Rightarrow\ x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 + 2.$$

Damit wird $(**)$ eine Gleichung in z

$$3z^2 - z - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ z = 1 \text{ oder } z = \frac{2}{3}.$$

Hieraus können wir die Lösung für x bestimmen.