# Analysis I WS 2019/20
# Kurztestbeispiele für 12.12.2019

Die Partialbruchzerlegung ist eine standardisierte Darstellung rationaler Funktionen. Sie kommt bei der Integration rationaler Funktionen zur Anwendung. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$(a)\quad \frac{2x^3-x+2}{x^2-x-2}, \qquad (b)\quad \frac{x^2+1}{2x^2-x-3}, \qquad (c)\quad \frac{-2x^3+3x}{3x^2-2x-1},$$
$$(d)\quad \frac{x^3+x-1}{-x^2-2x+8}, \qquad (e)\quad \frac{3x^3+x^2-x-1}{x^2-1}, \qquad (f)\quad \frac{-x^2+1}{2x^2+3x-14}.$$

**Musterlösung:** Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{x^3-3x^2+x-1}{2x^2+x-3}. \tag{P}$$

Durch Polynomdivision $(x^3-3x^2+x-1):(2x^2+x-3)$ erhalten wir den Term $\frac{x}{2}-\frac{7}{4}$ und den Rest $\frac{17}{4}x-\frac{25}{4}$. Deshalb gilt

$$\frac{x^3-3x^2+x-1}{2x^2+x-3}=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}+\frac{\frac{17}{4}x-\frac{25}{4}}{2x^2+x-3}.$$

Die Gleichung $2x^2+x-3=0$ hat zwei Lösungen $x_1=1$ und $x_2=-\frac{3}{2}$. Es folgt daraus $2x^2+x-3=(2x+3)(x-1)$. Jetzt suchen wir $A,B\in\mathbb{R}$, sodass

$$\frac{\frac{17}{4}x-\frac{25}{4}}{2x^2+x-3}=\frac{A}{2x+3}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(2x+3)}{(2x+3)(x-1)}=\frac{(A+2B)x-A+3B}{2x^2+x-3}.$$

Somit muss gelten:

$$\begin{cases} A+2B=\frac{17}{4} & (1) \\ -A+3B=-\frac{25}{4} & (2). \end{cases}$$

Aus $(1)$ folgt $A=\frac{17}{4}-2B$. Einsetzen in $(2)$ liefert,

$$-\frac{17}{4}+2B+3B=-\frac{25}{4} \quad\Longrightarrow\quad B=-\frac{2}{5} \quad\Longrightarrow\quad A=\frac{101}{20}.$$

Insgesamt folgern wir daraus, dass

$$\frac{x^3-3x^2+x-1}{2x^2+x-3}=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}+\frac{\frac{101}{20}}{2x+3}+\frac{-\frac{2}{5}}{x-1}.$$