Analysis I WS 2019/20
Kurztestbeispiele für 05.12.2019

Geben Sie die Real- und Imaginärteile der Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$(a)\quad x^2 = 1 + i, \qquad (b)\quad x^2 = 1 - 2i, \qquad (c)\quad 3x^2 = i,$$
$$(d)\quad x^2 - x - i = 0, \qquad (e)\quad x^2 - 2x - i = 0, \qquad (f)\quad 2x^2 - x - i = 0.$$

$$(a)\ x = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})}}\right), \quad (b)\ x = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}i\right)$$

$$(c)\ x = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{i}{\sqrt{6}}\right), \qquad (d)\ x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{17}}}i,$$

$$(e)\ x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})}},$$

$$(f)\ x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{1+\sqrt{65}}}{4\sqrt{2}} \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{65}}}i$$

Beispielhafte Herleitung der Lösung:

$$x^2 - x + i = 0. \tag{0.1}$$

Um die Lösungsformel für quadratische Gleichungen verwenden zu können, muss man

$$\sqrt{(-1)^2 - 4i} = \sqrt{1 - 4i}$$

bestimmen. Sei $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ eine Wurzel von $1 - 4i$. Dann gilt

$$z^2 = 1 - 4i \quad \Leftrightarrow (a + bi)^2 = 1 - 4i \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 + 2abi = 1 - 4i.$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = -4. \end{cases}$$

Mit $2ab = -4$ erhält man $b = -\frac{2}{a}$. Einsetzen in $a^2 - b^2 = 1$ liefert (wegen $a \neq 0$)

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = 1 \quad \Leftrightarrow a^4 - a^2 - 4 = 0.$$

Setzen wir nun $u = a^2 \geq 0$, dann folgt $u^2 - u - 4 = 0$ und somit

$$u_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} > 0 \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} < 0 \quad \text{(ist keine Lösung)}.$$

Deshalb erhalten wir

$$a = \pm\sqrt{u_1} = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \quad \text{und} \quad b = -\frac{2}{a} = \mp\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{17}}}.$$

Entsprechend folgt auch

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{17}}}i\right).$$

Jetzt können wir die Lösungsformel für (0.1) verwenden und erhalten die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm z}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \mp \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{17}}}i$$