INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND
WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN

http://imsc.uni-graz.at/bredies/teaching_de.html#ss17imaging

Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 6

Termin: 14. Juni 2017

Aufgabe 6.1: [Diskrete Kosinus-Transformation als diskrete Fourier-Transformation]
Es sei $N \geq 1$ und $u \in \mathbf{R}^N$. Zeigen Sie, dass die diskrete Kosinus-Transformation

$$\mathrm{DCT}(u)_n = \lambda_n \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \cos\Big(\frac{(k+\frac{1}{2})n\pi}{N}\Big), \qquad \lambda_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \neq 0, \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

mittels der diskreten Fourier-Transformation wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\mathrm{DCT}(u)_n = \sqrt{2}\lambda_n \hat{v}_n, \quad v_k = \begin{cases} u_{(k-1)/2} & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 \leq k \leq 2N-1, \\ u_{2N-1-(k-1)/2} & \text{falls } k \text{ ungerade und } 2N \leq k \leq 4N-1, \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

für $0 \leq n \leq N-1$ wobei $\hat{v}$ die diskrete Fourier-Transformation von v der Länge $4N$ bezeichnet.

Aufgabe 6.2: [Schnelle Fourier-Transformation]
Es sei $N \geq 1$ eine Zweierpotenz und $u \in \mathbf{C}^N$. Zeigen Sie, dass mittels der Rekursion

$$\mathrm{FFT}_N(u)_n = \begin{cases} v_n + w_n \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n/N} & \text{falls } 0 \leq n \leq N/2-1, \\ v_n - w_n \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n/N} & \text{falls } N/2 \leq n \leq N-1, \end{cases} \quad \begin{aligned} v &= \mathrm{FFT}_{N/2}(u_{\mathrm{gerade}}), \\ w &= \mathrm{FFT}_{N/2}(u_{\mathrm{ungerade}}), \end{aligned}$$

sowie $(u_{\mathrm{gerade}})_n = u_{2n}$, $(u_{\mathrm{ungerade}})_n = u_{2n+1}$, $\mathrm{FFT}_1 = \mathrm{id}$, die Fourier-Transformation ohne Normierung, d.h.

$$\mathrm{FFT}_N(u)_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} nk/N} \qquad n = 0, \ldots, N-1,$$

mit Aufwand $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ berechnet werden kann.

Aufgabe 6.3: [Implementierung von JPEG-Rekonstruktion]
Schreiben Sie ein Programm, welches die Rekonstruktion eines Graustufenbildes anhand von JPEG-Daten vornimmt:

$$u = \texttt{JPEG\_recon}(v, Q)$$

wobei v quantisierte Block-DCT-transformierte Daten in 8×8-Blöcken und Q die verwendete Quantisierungsmatrix bezeichnet. Sie können dabei die inverse DCT ohne Normierung verwenden, wie z.B. den Matlab-Befehl `idct2`.
Testen Sie das Programm anhand der Daten `jpeg_dct_data.mat` und visualisieren Sie das Ergebnis. Hinweis: Das rekonstruierte Bild hat den Grauwertbereich $[-128, 127]$.