Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 5

Termin: 24. Mai 2017

Aufgabe 5.1: [Fouriertransformation rotationssymmetrischer Funktionen]

i) Zeigen Sie, dass für $u \in L^2(\mathbf{R}^d)$ rotationssymmetrisch, d.h. $u \circ O = u$ für jedes $O \in \mathbf{R}^{d\times d}$ mit $O^T O = I$, die Fouriertransformierte $\mathcal{F}u$ ebenfalls rotationssymmetrisch ist.
ii) Es bezeichne $I : L^2([0,\infty[, \omega_d r^{d-1}\,\mathrm{d}r) \to L^2(\mathbf{R}^d)$ den Operator $(Iu)(x) = u(|x|)$, wobei ω_d das Flächenmaß der Einheitssphäre in $\mathbf{R}^d$ ist. Zeigen Sie: I ist eine Isometrie.
iii) Zeigen Sie, dass $H = I^*\mathcal{F}I$ eine bijektive isometrische Abbildung von $L^2([0,\infty[, \omega_d r^{d-1}\,\mathrm{d}r)$ in sich selbst ist.

Aufgabe 5.2: [Fouriertransformierte mit kompaktem Träger]
Zeigen Sie: Gilt für $u \in L^2(\mathbf{R})$ und $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbf{R})$, dass u und $\mathcal{F}u$ kompakten Träger besitzen, so folgt $u = 0$. Hinweis: Für u mit kompakten Träger ist die Funktion $z \mapsto \int_{\mathbf{R}} u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}\,\mathrm{d}x$ holomorph.

Aufgabe 5.3: [Berechnung von Fouriertransformierten]
Berechnen Sie $\mathcal{F}u$ für folgende Funktionen:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad u(x) = \begin{cases} x-1 & \text{falls } x \in [-1,0[, \\ 1-x & \text{falls } x \in [0,1[, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 5.4: [Lösung einer elliptischen Gleichung mit der Fourier-Transformation]
Entwickeln Sie ein Programm, welches die diskrete elliptische Gleichung

$$u - \alpha\Delta u = f$$

zu gegebenen $f = (f_{ij})_{ij}$ für $u = (u_{ij})_{ij}$ mit $0 \leq i \leq N-1$ und $0 \leq j \leq M-1$ löst. Der Parameter $\alpha > 0$ sei dabei fest gewählt. Der Operator Δ ist eine diskrete Version des periodischen Laplace-Operators und definiert durch die diskrete Faltung

$$(\Delta u)_{ij} = -4u_{ij} + u_{i+1 \bmod N, j} + u_{i-1 \bmod N, j} + u_{i, j+1 \bmod M} + u_{i, j-1 \bmod M}.$$

Benutzen Sie dabei die diskrete Fourier-Transformation `fft2`, ihre Inverse `ifft2` und wenden Sie den Faltungssatz an (der im Diskreten ebenfalls gilt).
Testen Sie Ihr Programm mit dem Bild knopf.png (skaliert auf den Grauwertebereich $[0,1]$) und $\alpha = 10$.