http://imsc.uni-graz.at/bredies/teaching_de.html#ss17imaging

Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 4

Termin: 10. Mai 2017

Aufgabe 4.1: [Mediane als Minimierungsprobleme]

i) Es sei $f \in L^1(\Omega)$ gegeben. Zeigen Sie: Ist $a \in \mathbf{R}$ so gewählt, dass $\int_{\{f\geq a\}} \mathrm{d}x = \int_{\{f\leq a\}} \mathrm{d}x$, dann löst a das Minimierungsproblem
$$\min_{a\in\mathbf{R}} \int_\Omega |f(x) - a| \,\mathrm{d}x.$$

ii) Es sei H ein reeller Hilbertraum und $a_1, \ldots, a_n \in H$ gegeben. Zeigen Sie: Erfüllt $a \in H$ die Bedingung
$$\Bigl\| \sum_{\substack{i=1\\ a_i\neq a}}^{n} \frac{a_i - a}{\|a_i - a\|} \Bigr\| \leq \#\{i \,|\, a_i = a\},$$
so löst a das Minimierungsproblem
$$\min_{a\in H} \sum_{i=1}^{n} \|a_i - a\|.$$
Hinweis: Ist $a_i \neq a$, so gilt für beliebiges $b \in H$, dass $\|a_i - a\| + \langle \frac{a_i-a}{\|a_i-a\|}, a - b\rangle \leq \|a_i - b\|$; ist $a_i = a$ so gilt analog $\|a_i - a\| + \langle \xi, a - b\rangle \leq \|a_i - b\|$ für beliebiges $\xi \in H$ mit $\|\xi\| \leq 1$.

Aufgabe 4.2: [Zerlegen von Strukturelementen]
Es sei $n \geq 1$ gegeben. Zerlegen Sie das diskrete Strukturelement
$$D_n = \{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 \,\big|\, |i| + |j| \leq n\}$$
so, dass eine Erosion und Dilatation mit D_n mit höchstens $4n$ paarweisen Vergleichsoperationen realisiert werden kann.

Aufgabe 4.3: [Nichtlokale Mittelung]
Entwickeln Sie ein Programm, welches eine nichtlokale Mittelung eines Bildes u wie folgt durchführt:
$$u(x) = \frac{\int_\Omega u(y) \exp^{-h(x,y)} \,\mathrm{d}y}{\int_\Omega \exp^{-h(x,y)} \,\mathrm{d}y} \qquad \text{mit} \qquad h(x,y) = \frac{\lambda}{P^2} \int_{[-P,P]^2} |u(x+z) - u(y+z)|^2 \,\mathrm{d}z$$
für $P > 0$ und $\lambda > 0$.

- Das Bild u soll außerhalb von Ω konstant fortgesetzt werden (MATLAB-Befehl `padarray` mit der Option `'replicate'`).
- Für die Berechnung von $y \mapsto h(x,y)$ kann die Identität $h(x,y) = g_0(x) + g_0(y) - 2(g_x * u)(y)$ mit
$$g_0(x) = \frac{\lambda}{P^2} \int_{[-P,P]^2} |u(x+z)|^2 \,\mathrm{d}z, \quad g_x(z) = \frac{\lambda}{P^2} \chi_{[-P,P]^2}(z) u(x-z)$$
verwendet werden. (Hinweise: Die Werte von g_0 können voraus berechnet werden. Für jedes x ist lediglich eine Faltung mit dem “Patch” g_x nötig (MATLAB-Befehl `conv2`).)

Testen Sie das Programm mit dem Bild auge_noise.png (skaliert auf den Grauwertbereich $[0,1]$) und den Parametern $P = 3$ sowie $\lambda = 200$.