INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN

http://imsc.uni-graz.at/bredies/teaching_de.html#ss17imaging

Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 3

Termin: 26. April 2017

Aufgabe 3.1: [Erosion und Dilatation auf stetigen/differenzierbaren Funktionen]
Es sei $B \subset \mathbf{R}^d$ ein nichtleeres, kompaktes Strukturelement. Zeigen Sie:

i) Ist $u : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ stetig, so sind $u \ominus B$ und $u \oplus B$ stetig.

ii) Ist $u : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar, so folgt nicht: $u \ominus B$ oder $u \oplus B$ ist stetig differenzierbar.

Aufgabe 3.2: [Konvexe Strukturelemente]
Es bezeichne für Mengen $A, B \subset \mathbf{R}^d$ und $c \in \mathbf{R}$, $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ sowie $cA = \{cx \mid x \in A\}$. Es sei $B \subset \mathbf{R}^d$ nichtleer und konvex, $s > 0$ und $t > 0$. Zeigen Sie: $sB + tB = (s + t)B$.

Aufgabe 3.3: [Lösung der Wärmeleitgleichung]
Für $u_0 : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ stetig und beschränkt definiere

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} u_0(y) \mathrm{e}^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} \,\mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie: $u :]0, \infty[\times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ ist wohldefiniert und löst die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ in $]0, \infty[\times \mathbf{R}^d$ mit $\lim_{t \to 0, y \to x} u(t, y) = u_0(x)$ für jedes $x \in \mathbf{R}^d$.

Aufgabe 3.4: [Kreisscheiben verschiedener Größe erkennen]
Entwickeln Sie ein Programm, welches zu einem gegebenen Binärbild u_0 von Kreisscheiben verschiedener Größe eine Liste von Positionen und Größen dieser Kreisscheiben ermittelt.

- Berechnen Sie dazu das Bild u gegeben durch $u(x) = \sup_{t>0} (u \ominus tB)(x) > 0$ für $B = B_0(1)$ die euklidische Kreisscheibe. Bemerkung: Die Erosion lässt sich im Matlab zum Beispiel durch die Befehle `imerode` und `strel` realisieren.
- Bestimmen Sie die lokalen Maxima von u mit $u(x) > 0$. Das Paar $(x, u(x))$ für x lokales Maximum entspricht dabei Position und Größe einer Kreisscheibe. Bemerkung: Pixel x ist ein lokales Maximum, wenn die Werte in den benachbarten linken, rechten, oberen und unteren Pixeln strikt kleiner sind.
- Visualisieren Sie das Ergebnis in einer Grafik, die dem Bild u_0 die detektierten Kreise überlagert.

Testen Sie das Programm am Bild `circles.png`.