INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN

http://imsc.uni-graz.at/bredies/teaching_de.html#ss17imaging

Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 2

Termin: 29. März 2017

Aufgabe 2.1: [Faltungsoperatoren auf L^p-Räumen]
Es sei $h \in L^1(\mathbf{R}^d)$ ein Faltungskern mit kompaktem Träger. Zeigen Sie:

i) Der Faltungsoperator $u \mapsto u * h$ ist eine lineare und stetige Selbstabbildung auf $L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d)$ für $1 \leq p \leq \infty$.
Bemerkung: Der Raum $L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d)$ ist metrisierbar mit der Metrik

$$d(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|(u-v)|_{K_n}\|_p}{1 + \|(u-v)|_{K_n}\|_p}$$

wobei $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ eine Folge kompakter Mengen mit $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \mathbf{R}^d$ bildet.

ii) Die Faltung mit einem Polynom ergibt wieder ein Polynom. Darüber hinaus: Gilt für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$, dass

$$\int_{\mathbf{R}^d} x^\alpha h(x) \, \mathrm{d}x = 0,$$

so folgt $u * h = 0$ für alle Polynome u vom Grad kleiner oder gleich k.

iii) Für $u \mapsto u * h$ als Selbstabbildung des $L^p(\mathbf{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$, ist der adjungierte Operator wieder eine Faltung.

Aufgabe 2.2: [Distributionelle Ableitungen]
Es bezeichne $\Omega =]a, b[$, $a < b$ ein offenes beschränktes Intervall.
Zeigen Sie:

i) Für $u : \Omega \to \mathbf{R}$ stückweise konstant, d.h., $u|_{]x_i, x_{i+1}[}$, $i = 1, \ldots, n$ ist konstant für $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} = b$, ist die distributionelle Ableitung eine endliche Linearkombination von Dirac-Maßen.
Bemerkung: Zu zeigen ist, dass es ein $\mu = \sum_{j=1}^{m} c_j \delta_{y_j}$ gibt, so dass für alle $\varphi :]a, b[\to \mathbf{R}$ beliebig oft differenzierbar und mit kompaktem Träger gilt:

$$-\int_\Omega u \varphi' \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu.$$

ii) Für $u : \Omega \to \mathbf{R}$ monoton steigend ist die distributionelle Ableitung u' ein positives Maß. Es gilt für $x \in \Omega$: Falls $u'(\{x\}) > 0$, so ist u unstetig in x.

Aufgabe 2.3: [Implementierung einer automatischen Schwellwertwahl]
Schreiben Sie ein Programm, welches eine automatische Schwellwertwahl anhand der Fixpunktiteration

$$s_0^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\frac{\int_{[0, s_0^n[} s \, \mathrm{d}H_u(s)}{\int_{[0, s_0^n[} 1 \, \mathrm{d}H_u(s)} + \frac{\int_{[s_0^n, S]} s \, \mathrm{d}H_u(s)}{\int_{[s_0^n, S]} 1 \, \mathrm{d}H_u(s)} \right]$$

und anschließende Segmentierung anhand Schwellwertbildung durchführt.
Testen Sie dieses Programm anhand des Bildes `barcode.png`[1].

[1]Photo by Nick Richards, licenced under CC BY-SA 2.0.