INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN

http://imsc.uni-graz.at/bredies/teaching_de.html#ss17imaging

Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 1

Termin: 15. März 2017

Aufgabe 1.1: [Translation und Skalierung auf L^p-Räumen]
Es bezeichne T_y und D_A jeweils den Verschiebungsoperator um $y \in \mathbf{R}^d$ und den mit $A \in \mathbf{R}^{d\times d}$ assoziierten Skalierungsoperator. Es sei $p \in [1, \infty]$.
Zeigen Sie:

i) Für jedes y ist $T_y : L^p(\mathbf{R}^d) \to L^p(\mathbf{R}^d)$ wohldefiniert und ein stetiger linearer Operator.
ii) Für A regulär ist $D_A : L^p(\mathbf{R}^d) \to L^p(\mathbf{R}^d)$ wohldefiniert und ein stetiger linearer Operator.
iii) Die Menge der Operatoren

$$\{T \,\big|\, T = D_A T_y,\ y \in \mathbf{R}^d,\ A \in \mathbf{R}^{d\times d} \text{ regulär}\}$$

auf $L^p(\mathbf{R}^d)$ bilden eine Gruppe bezüglich Hintereinanderausführung.

Aufgabe 1.2: [Interpolationsfunktionen]
Es sei $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine Interpolationsfunktion, d.h., $\phi(i) = \delta_{0i}$ für $i \in \mathbf{Z}$ und es bezeichne ϕ_i die Funktion gegeben durch $\phi_i(x) = \phi(x - i)$. Ferner gelte: $\phi \geq 0$ auf $\mathbf{R}$ sowie $\sum_{i\in\mathbf{Z}} \phi_i(x) = 1$ für alle $x \in \mathbf{R}$.
Zeigen Sie:

i) Für $U_1, \ldots, U_N \in \mathbf{R}$ und $u = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i$ gilt: $\min_i U_i \leq u(x) \leq \max_i U_i$ für alle $x \in \mathbf{R}$.
ii) Die obigen Eigenschaften gelten für ϕ^0 und ϕ^1, d.h., den Interpolationsfunktionen für die "nearest-neighbor" und stückweise lineare Interpolation.
iii) Es gibt eine Funktion $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar, mit obigen Eigenschaften sowie $\phi|_{[i,i+1[}$ kubisches Polynom und $\phi'(i) = 0$ für alle $i \in \mathbf{Z}$.

Aufgabe 1.3: [Implementierung von Transformationsoperatoren]
Schreiben Sie ein Programm, welches den Operator D_A auf ein diskretes Bild U anwendet. Dieses soll folgende Anforderungen erfüllen:

- Das diskrete Eingangsbild U wird bilinear interpoliert.
- Aus das interpolierte Bild wird die Koordinatentransformation d_A mit den Daten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

angewendet.
- Das transformierte (kontinuierliche) Bild wird mittels Punktabtastung bzgl. eines regulären Einheitsgitters in ein diskretes verwandelt (mit entsprechender Größe und Grenzen).

Testen Sie Ihr Programm am Bild auge.png und der Matrix $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.