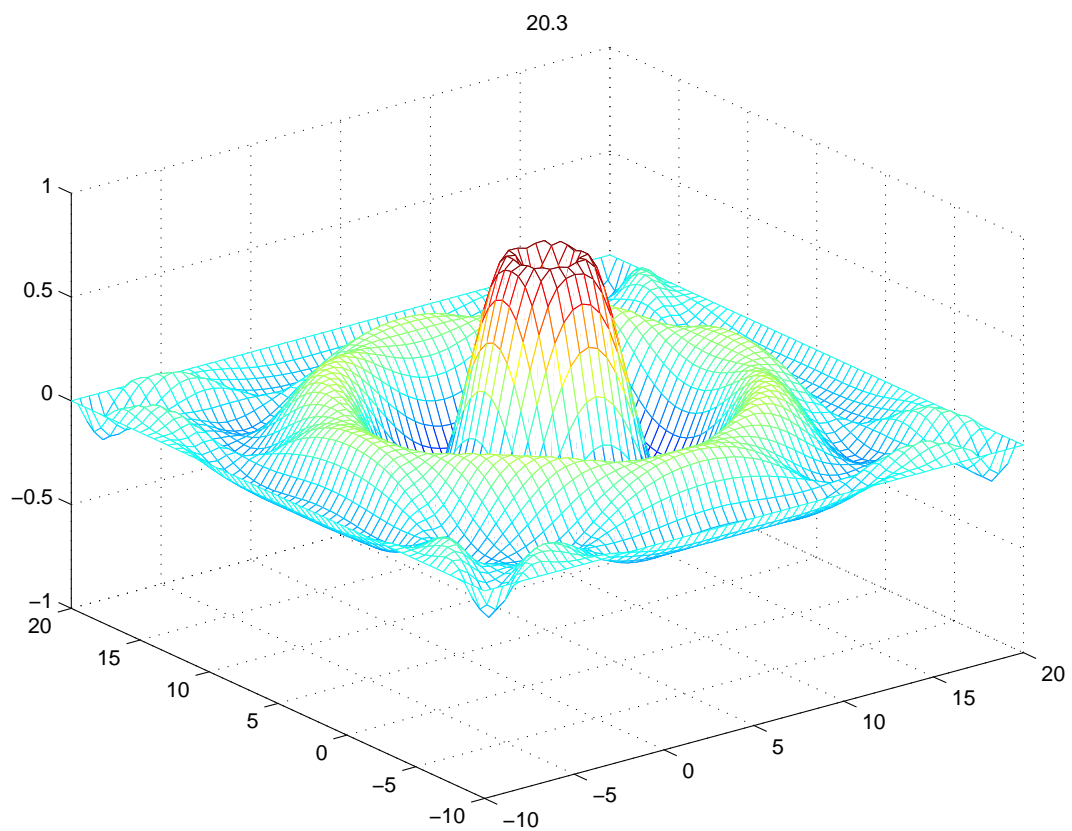


# Die Wellengleichung

Martin Kahlbacher, Ledina Hoxha, Martin Kanitsar, Daniela Pak

June 29, 2004



## *Inhaltsverzeichnis*

### **1. Herleitung der Wellengleichung für die Schallausbreitung**

### **2. Theorie der Wellengleichung**

- 2.1 ..... Lösung für  $n = 1$  , D'Alembert Formel
- 2.2 ..... Lösung der Wellengleichung  $n = 1$
- 2.3 ..... Kugel - Mittelung
- 2.4 ..... Euler-Poisson-Darboux Gleichung
- 2.5 ..... Lösung für  $n = 3$
- 2.6 ..... Lösung für  $n = 2$
- 2.7 ..... Inhomogene Probleme
- 2.8 ..... Lösung der nicht homogenen Wellengleichung
- 2.9 ..... Energie Methode - Eindeutigkeit
- 2.10 .... Endliche Übertragung und Geschwindigkeit

### **3. Fehler zwischen exakter und numerischer Lösung**

### **4. Untersuchung der numerischen Stabilität**

# 1 Herleitung der Wellengleichung für die Schallausbreitung

Für unsere Zwecke ist es ausreichend die Luft als ideales Gas zu betrachten. Die aus dem Gas austretende Kraft ist wie folgt definiert:

$$-\int_S p(x)v(x)dx_\sigma \quad (1)$$

wobei

$$v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x)) \quad (2)$$

Für die 1. Koordinate gilt:

$$-\int_S p(x)v_1(x)dx_\sigma \quad (3)$$

Wegen des Divergenztheorems folgt

$$-\int_S p(x) \cdot v_1(x)dx_\sigma = -\int_D \frac{\partial p}{\partial x_1}(x)dx \quad (4)$$

Da man mit allen anderen Koordinaten genauso verfahren kann, folgt die Kraft die auf D wirkt:

$$-\int_D \nabla p(x)dx \quad (5)$$

Seien  $g(t,x)$  die Dichte und

$$w(t, x) = (w(t, x), w(t, x), w(t, x)) \quad (6)$$

die Beschleunigung und  $f(t,x)$  die äußere Kraft, die auf  $x$  wirkt.

Aufgrund der Beziehung der Beschleunigung und der dazugehörigen Kräfte erhält man den Ausdruck :

$$-\int_D \nabla p(x)dx + \int_D f(t, x)dx = \int_D g(t, x)w(t, x)dx \quad (7)$$

Da dies für alle D gilt, ergibt sich :

$$g(t, x)w(t, x) = -\nabla p(x) + f(t, x) \quad (8)$$

$$v(t, x) = (v(t, x), v(t, x), v(t, x)) \quad (9)$$

bezeichnet den Geschwindigkeitsvektor des Gases.

Dann bewegt sich das Gas nach einem Zeitintervall  $t$  zum Punkt

$$x + \Delta t v(t, x) \quad (10)$$

$$\Rightarrow v(t + \Delta t, x + \Delta t v(t, x)) \quad (11)$$

Daraus folgt : Die Beschleunigung ergibt sich durch  $t$  gegen 0 von

$$\frac{1}{\Delta t} (v(t + \Delta t, x + \Delta t v(t, x)) - v(t, x)) \quad (12)$$

Daraus folgt wiederum :

$$w(t, x) = \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x) \cdot v_1(t, x) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(t, x) \cdot v_2(t, x) + \frac{\partial v}{\partial x_3}(t, x) \cdot v_3(t, x) \quad (13)$$

Der nächste zu betrachtende Punkt in der Herleitung ist das Verhältnis zwischen der Geschwindigkeit  $v$  und der Dichte  $g$ .  $D$  sei ein willkürliches Gebiet mit  $S$  als Rand.

Da die Masse des Gases innerhalb von  $D$  wie folgt definiert ist :

$$\int_D g(t, x) dx \quad (14)$$

ergibt sich die Veränderung der Masse nach der Zeit :

$$\int_D \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) dx \quad (15)$$

Andererseits ist die durch den Rand des Gases ausfließende Masse nach der Zeit  $t$ :

$$\int_S g(t, x) v(t, x) \nu(x) d\sigma \quad (16)$$

Wiederum aufgrund des Divergenztheorems folgt :

$$\int_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (g(t, x) v_1(t, x)) + \frac{\partial}{\partial x_2} (g(t, x) v_2(t, x)) + \frac{\partial}{\partial x_3} (g(t, x) v_3(t, x)) \right\} dx \quad (17)$$

$$\Rightarrow \int_D \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) dx = \int_D \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (g(t, x) v_i(t, x)) dx \quad (18)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial t} + \text{div}(g(t, x) v(t, x)) = 0 \quad (19)$$

$g_0$  .... Druck der Luft in Ruhe und  $u(t, x)$  .... Function that denotes the rate of divergence from  $g_0$

$$g(t, x) = g_0(1 + u(t, x)) \quad (20)$$

”Druck und Dichte sind konstant”

$$\Rightarrow p(t, x) = K g(t, x) = K g_0(1 + u(t, x)) \quad (21)$$

$$\Rightarrow \nabla p(t, x) = K \nabla g(t, x) \quad (22)$$

Das Gas bewegt sich nur langsam fort. Für ein hinreichend kleines  $\epsilon > 0$  sind der Geschwindigkeitsvektor  $v$ , die Kompressionsrate  $u$  und die äußere Kraft  $f$  wie folgt:

$$v = \epsilon v_0 + \epsilon^2 v_2 + \dots; u = \epsilon u_0 + \epsilon^2 u_1 + \dots; f = \epsilon f_0 \quad (23)$$

Wegen der vorhergehenden Ergebnisse folgt :

$$g_0 \frac{\partial v_0}{\partial t} = -K g_0 \nabla u_0 + f_0 \quad (24)$$

$$g_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} + g_0 \text{div} v_0 = 0 \quad (25)$$

Bilden der Divergenz auf beiden Seiten :

$$g_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} v_0 = -K g_0 \text{div} \nabla u_0 + \text{div} f_0 \quad (26)$$

Bilden der partiellen Ableitung auf beiden Seiten :

$$g_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_0 + g_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} v_0 = 0 \quad (27)$$

Durch kombinieren der letzten beiden Gleichungen erhält man :

$$g_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - K g_0 \text{div} \nabla u_0 + \text{div} f_0 = 0 \quad (28)$$

$$\operatorname{div} \nabla u_0 = \Delta u_0 \quad (29)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - K \Delta u_0 = f_0 \quad (30)$$

$$(f_0 = -\frac{1}{g_0} \operatorname{div} f_0) \quad (31)$$

Lässt sich hier  $u_0$  ausdrücken so erhält man in Folge  $v_0$  (ist die Gleichung für jedes willkürliche  $f_0$  lösbar, so erhält man  $u_j$   $v_j$   $j = 1, 2, \dots$ )

Für die Schallausbreitung mit kleiner Amplitude kann man annehmen dass die Terme der Ordnung  $\epsilon^2$  und höher vernachlässigbar sind.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - K \Delta u = f \quad (32)$$

K bestimmt die Geschwindigkeit mit der sich die Welle ausbreitet. K ist die Proportionalitätskonstante zwischen Druck und Dichte, aber K ist nicht unabhängig von der Temperatur. In einem idealen Gas ist K proportional zur absoluten Temperatur. Nimmt man an dass sich die Temperatur des Gases mit der Position verändert, dann ist K eine Funktion von x.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum \frac{\partial}{\partial x_j} \left( K(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f \quad (33)$$

## 2 Theorie der Wellengleichung

Wir analysieren die Wellengleichung mit entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times (0, \infty), u = g, u_t = h; \text{ auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \quad (34)$$

Die Unbekannte ist

$$u : \bar{U} \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}, u = u(x, t)$$

### 2.1 Lösung für n=1, D'Alembert Formel

$$u_{tt} - u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) = 0 \quad (35)$$
$$u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$$

Dann schreiben wir

$$v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) \quad (36)$$

so dass daraus wird

$$v_t + v_x = 0 (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

Das ist die Transportgleichung.

Jetzt kommt die Frage: was ist die Lösung einer Transportgleichung?

Also von (1) mit  $b=-1$  haben wir:

$$v(x, t) = a(x - t) \text{ für}$$

$$a(x) = v(x, 0)$$

$$a(x) = u_t(x, 0) - u_x(x, 0) = h(x) - g'(x)$$

und von der Gleichung (36)

$$v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) = a(x - t) \quad (37)$$

$$u_t - u_x = a(x - t) \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

Das ist eine nicht homogene Transportgleichung und die Formel (37) mit  $n=1$  und  $b=-1$  ergibt damit:

$$u(x, t) = \int_0^t a(x + (t - s) - s) ds + u(x + t, 0) \quad (38)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + u(x+t, 0)$$

In Gleichung (34) ist

$$u = g(t=0)$$

also  $u(x, 0) = g(x)$  und mit  $u_t = h$

$$a(x) = v(x, 0) = u_t(x, 0) - u_x(x, 0) = h(x) - g'(x)$$

zurück in Gleichung (38)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t (h(y) - g'(y)) dy + g'(x+t) \quad (39)$$

daher ist die d'Alembert Formel :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy \quad (40)$$

und das ist auch die Lösung der Wellengleichung für  $n=1$ .

## 2.2 Lösung der Wellengleichung $n = 1$

Sei  $g \in C^2(\mathbb{R})$ ;  $h \in C^1(\mathbb{R})$ , und  $u$  gegeben durch (39)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy$$

Dann gilt:

(i)  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$

(ii)  $u_{tt} - u_{xx} = 0$  in  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

(iii)  $\lim u(x, t) = g(x^0)$ ,  $\lim u(x, t) = h(x^0)$  für  $x^0 \in \mathbb{R}^n$

Bemerkungen:

1) Die Lösung von Wellengleichung hat die Form

$$u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$$

Umgekehrt: so eine Funktion löst die Wellengleichung.



Die Lösung ist die Summe der Lösungen von

$$u_t - u_x = 0 \text{ und } u_t + u_x = 0$$

2) Wenn

$g \in C^k$  und  $h \in C^{k-1}$  ist  $u \in C^k$ , aber nicht glatter. (wie bei Laplace oder Wärmeleitung).

Jetzt bereiten wir die Resultate, die notwendig sind, um die Lösung der Wellengleichung  $n=2$  und  $n=3$  zu konstruieren.

### 2.3 Kugel - Mittelung

Für  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0, r > 0$  definiere

$$U(x, r, t) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y, t) dS(y)$$

die Mittelung von  $u(\cdot, t)$  auf  $\partial B(x, r)$

Ähnlich sei

$$G(x; r) = \oint_{\partial B(x,r)} g(y) dS(y)$$

$$H(x; r) = \oint_{\partial B(x,r)} h(y) dS(y)$$

Für  $x$  fix ist  $U$  eine Funktion von  $r$  und  $t$  und wir haben folgendes:

### 2.4 Euler-Poisson-Darboux Gleichung

$x \in \mathbb{R}^n$  fix und  $u \in C^m, (\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) (m \geq 2)$  Lösung von ( $n \geq 2$ )

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), u = g, u_t = h \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \quad (41)$$

Dann ist

$$U \in C^m(\mathbb{R}_+ \times [0, \infty)) \text{ und}$$

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty)$$

$$U = G, U_t = H \text{ auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}$$

Das ist die Euler-Poisson-Darboux Gleichung.

### 2.5 Lösung für $n = 3$

Sei angenommen, dass  
 $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$  löst:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= g, u_t = h \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

und erinnern wir uns an die Definition von U,G,H.  
 Setzen wir

$$\tilde{U} = rU, \tilde{G} = rG, \tilde{H} = rH$$

Man kann sofort verifizieren, dass  $\tilde{U}$  Lösung von folgendem Problem ist:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{rr} &= 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ \tilde{u} &= \tilde{G}, \tilde{u}_t = \tilde{H} \text{ auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ \tilde{u} &= 0 \text{ auf } \{r = 0\} \times (0, \infty) \end{aligned}$$

Tatsächlich

$$\tilde{u}_{tt} = rU_{tt}r[u_{rr} + \frac{2}{r}u_r] = [U + rU_r]_r = \tilde{u}_{rr}$$

Ähnlich wie bei  $n = 1$  findet man

$$\tilde{u}(x; r, t) = \frac{1}{2}[\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)] + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy; 0 \leq r \leq t$$

Und für  $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$  finden wir dass:

$$u(x, t) = \oint_{\partial B(x,t)} [th(y) + g(y) + Dg(y)(y-x)dS(y)]$$

Das ist die Kirchhoff Formel für die Lösung von

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

$$u = g, u_t = h \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

## 2.6 Lösung für n = 2

Wie durch die Lösung für  $n = 3$  mit  $x_3$  fix gefunden.

Die Lösung lautet :

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \oint_{B(x,t)} \frac{tg(y)+t^2h(y)+tDg(y)(y-x)}{(t^2-y-x^2)^{\frac{1}{2}}} dy \text{ für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

Diese Formel heißt die Poisson Formel für die Lösung von

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

$$u = g, u_t = h \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

Bemerkung: Für  $n$  ungerade propagiert eine Störung von  $g$  und  $h$  auf die Wellenfront. Für  $n$  gerade wirkt sie auch hinter der Front.

## 2.7 Inhomogene Probleme

Betrachten wir folgendes Problem

$$u_{tt} - \Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

$$u = 0, u_t = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

Dem Duhamel Prinzip zur Folge ist

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t, s) ds \text{ wobei } u(x, t, s) \text{ löst :}$$

$$u_{tt}(\cdot; s) - u_{xx}(\cdot; s) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty),$$

$$u(\cdot; s) = 0 \text{ } u_t(\cdot; s) = f(\cdot; s) \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

Das ist die Lösung von

$$u_{tt} - \Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

$$u = 0, u_t = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

## 2.8 Lösung der nicht homogenen Wellengleichung

Sei  $n \geq 2$  und  $f \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ ,  
Sei  $u$  gegeben mit

$$u(x, t) = \int_0^t (x, t, s) ds$$

Dann gilt :

(i)

$$u \in C^2 \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$$

(ii)

$$u_{tt} - u_{xx} = f \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

(iii)

$$\lim_{(x, t) \rightarrow (x^0, 0)} u(x, t) = 0 \quad \lim_{(x, t) \rightarrow (x^0, 0)} u_t(x, t) = 0$$

## 2.9 Energie Methode - Eindeutigkeit

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge mit glattem Rand  $\partial U$ , und  
 $U_T = U \times [0, T]$ ,  $\Gamma_T = \overline{U_T} - U_T$ , für  $T > 0$   
Wir betrachten folgendes Problem :

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f \text{ in } U_T \\ u &= g \text{ auf } \Gamma_T \\ u_t &= h \text{ auf } U \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

Es gibt maximal eine Lösung  $u \in C^2(U_T)$  zum oberen Problem

Beweis :

Sei  $\tilde{u}$  eine andere Lösung. Dann löst  $w = u - \tilde{u}$

$$\begin{aligned} w_{tt} - \Delta w &= 0 \text{ in } U_T \\ w &= 0 \text{ auf } \Gamma_T \\ w_t &= 0 \text{ auf } U \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

Die Energie ist wie folgt definiert

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_U (w_t^2 + Dw^2 dx)$$

dann ist

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_U (w_t w_{tt} + Dw Dw_t) dx, \quad 0 \leq t \leq T \\ &= \int_U (w_{tt} - Dw) w_t dx = 0 \end{aligned}$$

Es gibt keinen Randterm weil  $w = 0$  und so ist auch  $w_t = 0$  auf  $\partial U \times [0, T]$ . Dann gilt für alle  $0 \leq t \leq T, e(t) = e(0) = 0$  und deshalb  $w_t = 0, Dw = 0$  in  $U_t$  weil  $w = 0$  auf  $U \times \{t = 0\}$  ist, dann folgt  $w = u - \tilde{u} \equiv 0$  in  $U_T$ .

## 2.10 Endliche Übertragung und Geschwindigkeit

Wenn  $u = 0, u_t = 0$  auf  $B(x_0, t_0)$  dann ist  $u = 0$  in  $C$ .

Beweis:

Sei

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} (u_t^2 + Du^2 dx)$$

dann

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t u_{tt} + Du Du_t dx - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} u_t^2 + Du^2 ds \\ &= \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t (u_{tt} - u_{xx}) dx + \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \times u_t ds - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} u_t^2 + Du^2 ds \end{aligned}$$

$$= \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) u_t - \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} Du^2 ds.$$

Jetzt folgt :

$$\left|\frac{\partial u}{\partial v} u_t\right| \leq |u_t| |Du| \leq \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |Du|^2$$

also  $e'(t) \leq 0$  und so gilt  $e(t) \leq e(0) = 0$

für alle  $0 \leq t \leq t_0$ .

Es gilt also  $u_t = 0$  und  $Du = 0$  also  $u = 0$  in  $C$

### 3 Fehler zwischen exakter und numerischer Lösung

Wir betrachten die numerische Approximation der Wellengleichung

$$\partial_t^+ \partial_t^- u - D_x^+ D_x^- u = f \quad (42)$$

und versuchen herauszufinden, wie groß der Fehler zwischen der exakten Lösung der Wellengleichung  $u_{tt} - u_{xx} = f$  und der Lösung der Differenzengleichung (42) ist.

Dazu verwenden wir die Bezeichnung  $e_i^m = u(x_i, t_m) - u_i^m$  und betrachten die Differenzengleichung

$$\partial_t^+ \partial_t^- e_i^m - D_x^+ D_x^- e_i^m = \varphi_i^m \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \text{Daraus folgt } \varphi_i^m &= \partial_t^+ \partial_t^- u(x_i, t_m) - \partial_t^+ \partial_t^- u_i^m - D_x^+ D_x^- u(x_i, t_m) + D_x^+ D_x^- u_i^m \\ &= \partial_t^+ \partial_t^- u(x_i, t_m) - D_x^+ D_x^- u(x_i, t_m) - f_i^m \\ &= \partial_t^+ \partial_t^- u(x_i, t_m) - D_x^+ D_x^- u(x_i, t_m) - f(x_i, t_m) \\ &= \partial_t^+ \partial_t^- u(x_i, t_m) - D_x^+ D_x^- u(x_i, t_m) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_m) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_m)\right) \\ &= \left(\frac{u(x_i, t_{m+1}) - 2u(x_i, t_m) + u(x_i, t_{m-1}))}{k^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_m)\right) - \left(\frac{u(x_{i+1}, t_m) - 2u(x_i, t_m) + u(x_{i-1}, t_m)}{h^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_m)\right) \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklungen von  $u$  in  $(x_i, t_{m+1})$  beziehungsweise in  $(x_i, t_{m-1})$  bezüglich der Zeitableitung jeweils um den Entwicklungspunkt  $(x_i, t_m)$  ergeben:

$$u(x_i, t_{m+1}) = u(x_i, t_m) + k \frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_m) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_m) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x_i, t_m) + \frac{k^4}{24} \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x_i, t_m) \text{ und}$$

$$u(x_i, t_{m-1}) = u(x_i, t_m) - k \frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_m) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_m) - \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x_i, t_m) + \frac{k^4}{24} \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x_i, \eta_m), \text{ wobei } \eta_m \in [t_{m-1}, t_{m+1}]$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} u(x_i, t_{m+1}) + u(x_i, t_{m-1}) &= 2u(x_i, t_m) + k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_m) + \frac{k^4}{12} \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x_i, \eta_m) \\ \Rightarrow \frac{u(x_i, t_{m+1}) - 2u(x_i, t_m) + u(x_i, t_{m-1}))}{k^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_m) + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x_i, \eta_m) \end{aligned}$$

Analog erhält man für die Taylorentwicklungen bezüglich der Ortsableitung in  $(x_{i+1}, t_m)$  und  $(x_{i-1}, t_m)$

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, t_m) &= u(x_i, t_m) + h \frac{\partial}{\partial x} u(x_i, t_m) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_m) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_i, t_m) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi_i, t_m) \text{ und} \\ u(x_{i-1}, t_m) &= u(x_i, t_m) - h \frac{\partial}{\partial x} u(x_i, t_m) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_m) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_i, t_m) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi_i, t_m), \text{ wobei } \xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \Rightarrow \frac{u(x_{i+1}, t_m) - 2u(x_i, t_m) + u(x_{i-1}, t_m))}{h^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_m) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi_i, t_m) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_i^m = \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x_i, \eta_m) - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi_i, t_m)$$

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} M_t &= \max_{x,t} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right| \\ M_x &= \max_{x,t} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| \end{aligned}$$

erhalten wir

$$|\varphi_i^m| \leq \frac{1}{12} (k^2 M_t + h^2 M_x)$$

$$\text{und } \|\varphi^m\|_h \leq \frac{1}{12} (k^2 M_t + h^2 M_x)$$

Da das betrachtete Differenzenverfahren stabil ist, gilt für eine Lösung  $u$  von (42) die Ungleichung:

$$\max_{1 \leq m \leq M} \|u^m\|_h^2 \leq \|u^0\|_h^2 + C \sum_{m=0}^{M-1} k \|f(\cdot, t_m)\|_h^2 \quad (44)$$

Die selbe Ungleichung gilt auch für  $e$  als Lösung von (43) mit  $\varphi$  als rechter Seite:

$$\max_{1 \leq m \leq M} \|e^m\|_h^2 = \max_{1 \leq m \leq M} \|u(\cdot, t_m) - u^m\|_h^2 \leq \|u(\cdot, 0) - u^0\|_h^2 + C \sum_{m=0}^{M-1} k \|\varphi^m\|_h^2$$

Da  $u(x_i, 0) - u_i^0 = 0$  für alle  $i$ , gilt:

$$\max_{1 \leq m \leq M} \|u(\cdot, t_m) - u^m\|_h^2 \leq C \sum_{m=0}^{M-1} k \left(\frac{1}{12} (k^2 M_t + h^2 M_x)\right)^2$$

$\Rightarrow \max_{1 \leq m \leq M} \|u(\cdot, t_m) - u^m\|_h \leq C' (M_t k^2 + M_x h^2) \leq K(k^2 + h^2)$ , wobei

$$C' = \frac{\sqrt{C \sum_{m=0}^{M-1} k}}{12} \text{ und } K = C' \max\{M_t, M_x\}$$

Es gilt also  $\max_{1 \leq m \leq M} \|u(\cdot, t_m) - u^m\|_h = O(k^2 + h^2)$ , und, falls  $k$  und  $h$  linear zusammenhängen, also  $k = ph$ :  $\max_{1 \leq m \leq M} \|u(\cdot, t_m) - u^m\|_h \leq K(p^2 h^2 + h^2) = K(p^2 + 1)h^2$ , und somit  $\max_{1 \leq m \leq M} \|u(\cdot, t_m) - u^m\|_h = O(h^2)$

Table 1: Genauigkeitsfehler zwischen exakter und numerischer Lösung unseres Programmierbeispiels (Wellengleichung in einer Dimension)

$(h, k)$	$\max_{1 \leq m \leq M} \ u(\cdot, t_m) - u^m\ _h$	$O(h^2 + k^2)$
(0.05, 0.01)	0.005	
(0.025, 0.005)	0.002	2.4945
(0.0125, 0.0025)	$5.7358 \cdot 10^{-4}$	3.5008
(0.00625, 0.00125)	$1.483 \cdot 10^{-4}$	3.8677
(0.003125, 0.000625)	$3.7388 \cdot 10^{-5}$	3.9665
(0.0015625, 0.0003125)	$9.3668 \cdot 10^{-6}$	3.9916
(0.00078125, 0.00015625)	$2.3429 \cdot 10^{-6}$	3.9979
(0.000390625, 0.000078125)	$5.8581 \cdot 10^{-7}$	3.9995

In der linken Spalte werden  $h$  und  $k$  in der nächsten Zeile jeweils halbiert, das heißt, der Quotient  $p = \frac{k}{h} = 0.2$  bleibt konstant.

Die rechte Spalte zeigt den Quotienten, wenn zwei übereinanderliegende Genauigkeitsfehler (mittlere Spalte) dividiert werden. Man sieht, dass bei genügend kleiner Maschenweite diese Zahl gegen 4 strebt, was darauf zurückzuführen ist, dass der Genauigkeitsfehler  $\max_{1 \leq m \leq M} \|u(\cdot, t_m) - u^m\|_h$  - wie vorhin gezeigt - quadratisch mit der Verringerung von  $h$  beziehungsweise  $k$  verkleinert wird.



Die Daten werden mit folgendem MATLAB - Programm berechnet:

```
% Ausgabe des Genauigkeitsfehlers zwischen numerischer und exakter Loesung
% der Wellengleichung in einer Dimension
% mit  $f(x,t)=0$ ,  $g(x)=\exp(-(x-5)^2)$ ,  $h(x)=0$ 
% und Neumann-Randbedingungen
% fuer verschiedene k und h, wobei  $p=0.2$  konstant

% Ausserdem Ausgabe des Quotienten zweier Genauigkeitsfehler, wenn die
% Schrittweite halbiert wird

clear anzahl=8; h=0.1*(0.5.^(1:anzahl)); k=0.2*h;

for i=1:length(h)

    p=k(i)/h(i);
    x=0:h(i):10;
    n=length(x);
    u_0=exp(-(x-5).^2);          % g(x)=u_0
    u_1=u_0;          %+k*0      % h(x)=0
    u_alt=u_0;
    u=u_1;
    it_max=100;
    it=2;
    t=k(i);
    Norm=zeros(1,it_max);

    while it<it_max & t<15
        it=it+1;
        t=t+k(i);

        I=2:n-1;
        u_neu(I)=2*(1-p^2)*u(I) + p^2*(u(I+1)+u(I-1)) - u_alt(I);
        u_neu(1)=u_neu(2); %selbes Ergebnis fr Neumann- und Dirichlet-R.B.
        u_neu(n)=u_neu(n-1);
        u_alt=u;
        u=u_neu;
    end
end
```

```

        u_numerisch = u_neu;
        u_exakt = 1/2* ( exp(-(x-t-5).^2)+exp(-(x+t-5).^2) );
        Norm(it) = sqrt (h(i)*sum(abs(u_exakt(:)-u_numerisch(:)).^2));
    end

fehler(i) = max(Norm); end

fehler

quotient=fehler(1:anzahl-1)./fehler(2:anzahl)

```

Hier die numerische Lösung der Wellengleichung in einer Dimension:

```

% Loesung der Gleichung u nach tt - u nach xx = f
% wobei f(x,t)=exp(-10*(x-5)^2)*sin(0.8*t)
% und Neumann-Randbedingungen

```

```

h=0.1;
k=0.05;
p=k/h;
x=0:h:10;
it_max=200;

```

```

n=length(x); u_0=exp(-(x-5).^2); u_1=u_0;
hold on plot(x,u_0,'g')
plot(x,u_1,'r')

```

```

pause

```

```

U=zeros(it_max,n);
U(1,:)=u_0;
U(2,:)=u_1;
u_alt=u_0;
u=u_1;

```

```

it=2;
t=k;

while it<it_max & t<25
    it=it+1;
    t=t+k;
    I=2:n-1;
    u_neu(I)=2*(1-p^2)*u(I) + p^2*(u(I+1)+u(I-1))-u_alt(I)
        +k^2*sin(0.8*t)*exp(-10*(x(I)-5).^2);
    u_neu(1)=u_neu(2);%0;
    u_neu(n)=u_neu(n-1);%0;
    u_alt=u;
    u=u_neu;
    U(it,:)=u;
    plot(x,u)
    %axis([0 10 -1.1 1.1])
    hold off
    title(t)
    pause(0.001)
end

[X,T]=meshgrid(x,1:i);

pause
figure
mesh(X,T,U(1:i,:))

```

## 4 Untersuchung der numerischen Stabilität

Im folgenden Teil wird eine Herleitung einer Stabilitätsabschätzung für eine Wellengleichung gegeben. Die Stabilitätsuntersuchung bezieht sich auf 1D, 2D und 3D Wellengleichungen mit 2. und 4. Ordnung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (45)$$

Die von uns in Matlab implementierten Programme sind 1D und 2D-Wellengleichungen jeweils von 2.Ordnung.

Die Gewichte der finiten Differentialoperatoren  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  und  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  bezeichnen wir mit  $w$ ,  $\ddot{w}_m$ ,  $\tilde{w}_m$

z.B.: 2.Ordnung der 2.Ableitung in x-Richtung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = w_{-1}u_{i-1,j,k}^n + w_0u_{i,j,k}^n + w_1u_{i+1,j,k}^n$$

$$(1, -2, 1) = (w_{-1}, w_0, w_1)$$

z.B.: 4.Ordnung der 2.Ableitung in x-Richtung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = w_{-2}u_{i-2,j,k}^n + w_{-1}u_{i-1,j,k}^n + w_0u_{i,j,k}^n + w_1u_{i+1,j,k}^n + w_2u_{i+2,j,k}^n$$

$$\frac{1}{12}(-1, 16, -30, 16, -1) = (w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, )$$

$a_1 = \sum_{m=-M}^M |w_m| + |\ddot{w}_m| + |\tilde{w}_m| \dots$  Summe von Gewichten der räumlichen Diskretisierung

$a_2 = \sum_{m=-M}^M |\tilde{W}_m| \dots$  Summe von Gewichten der zeitlichen Diskretisierung

Beh.: Das Verfahren ist numerisch stabil wenn

$$\frac{\Delta t}{h} \leq \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \quad (46)$$

$$h = \Delta x = \Delta y = \Delta z$$

Wir führen in Folge nicht den Beweis für die allgemeine Aussage (45) sondern beschränken uns auf jenen Fall, bei dem die Zeitdiskretisierung von 2.Ordnung ist. Unsere Behauptung lautet daher:  
Das Verfahren ist numerisch stabil wenn

$$\frac{\Delta t}{h} \leq \frac{2}{\sqrt{a_2}} \quad (47)$$

Beweis der Beh.(47)

Der Fourieranteil des Rechenfehlers ist gegeben durch:

$$\varepsilon_{ijk}^n = \Gamma^n e^{ip_i \Delta x} e^{iq_j \Delta y} e^{irk \Delta z} \quad (48)$$

$i = \sqrt{-1}$ , die räumlichen Wellennummern in x,y,z werden mit p,q,r bezeichnet.  $\Gamma^n$  ist die Fourier amplitude zum Zeitschritt n.

Unter Verwendung der vorher getroffenen Bezeichnung der Gewichte können wir den Laplaceoperator folgendermaßen diskretisieren:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx \frac{1}{h^2} \sum_{m=-M}^M w_m u_{i+m,j,k}^n + \ddot{w}_m u_{i,j+m,k}^n + \tilde{w}_m u_{i,j,k+m}^n$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{1}{h^2} \sum_{l=-1}^1 W_l u_{i,j,k}^{n+l}$$

Es sei u das näherungsweise berechnete Wellenfeld und U das exakte Wellenfeld. Der Numerische Fehler  $\varepsilon$  ( $u=U+\varepsilon$ ) ist auch eine numerische Lösung der Wellengleichung (45). Aus diesem Grund erhalten wir die "Fehler - Wellengleichung" indem wir u durch  $\varepsilon$  ersetzen :

$$\frac{1}{h^2} \sum_{m=-M}^M w_m \varepsilon_{i+m,j,k}^n + \ddot{w}_m \varepsilon_{i,j+m,k}^n + \tilde{w}_m \varepsilon_{i,j,k+m}^n = \frac{1}{h^2} \sum_{l=-1}^1 W_l \varepsilon_{i,j,k}^{n+l} \quad (49)$$

Setzt man (48) in (49) ein und dividiert durch  $e^{ih(pi+qj+rk)}$  so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{\Delta t^2}{h^2} \sum_{m=-M}^M \Gamma^n (w_m e^{imph} + \ddot{w}_m e^{imqh} + \tilde{w}_m e^{imrh}) = \Gamma^{n+1} - 2\Gamma^n + \Gamma^{n-1} \quad (50)$$

Durch Umformen der Gleichung (50) erhalten wir

$$\Gamma^{n+1} = -\Gamma^{n-1} + 2A\Gamma^n \quad (51)$$

$$\text{mit } A = 1 + \frac{\Delta t^2}{2h^2} \sum_{m=-M}^M \Gamma^n (w_m e^{imph} + \ddot{w}_m e^{imqh} + \tilde{w}_m e^{imrh}) \quad (52)$$

Sei  $\gamma = \frac{\Gamma^{n+1}}{\Gamma^n} = \frac{\Gamma^n}{\Gamma^{n-1}}$ . Es gilt, dass das Verfahren numerisch stabil ist, wenn  $|\gamma| \leq 1$  ist.

Dividieren wir (51) durch  $\Gamma^{n-1}$  und bedenken, dass  $\frac{\Gamma^{n+1}}{\Gamma^{n-1}} = \frac{\Gamma^{n-1}}{\Gamma^{n-2}} \cdot \frac{\Gamma^2}{\Gamma} = \gamma^2$  ist so erhalten wir

$$\gamma^2 - 2A\gamma + 1 = 0 \quad (53)$$

bzw.  $\gamma$  ausgedrückt:  $\gamma = A \pm \sqrt{A^2 - 1}$

Stabilität ist sichergestellt, wenn  $-1 \leq A \leq 1$ . Das liefert folgendes Resultat:

$$-4 \leq \frac{\Delta t^2}{2h^2} \sum_{m=-M}^M (w_m e^{imph} + \ddot{w}_m e^{imqh} + \tilde{w}_m e^{imrh}) \leq 0 \quad (54)$$

Wir betrachten die linke Ungleichung von (54) und multiplizieren mit (-1). Somit erhalten wir folgende Ungleichung:

$$\frac{\Delta t^2}{2h^2} \left| \sum_{m=-M}^M (w_m e^{imph} + \ddot{w}_m e^{imqh} + \tilde{w}_m e^{imrh}) \right| \leq 4 \quad (55)$$

Wir benutzen weiters die Dreiecksungleichung und das Wissen, dass  $|e^{ix}| = 1$  und erhalten folgende Ungleichung:

$$\left| \sum_{m=-M}^M (w_m e^{imph} + \ddot{w}_m e^{imqh} + \tilde{w}_m e^{imrh}) \right| \leq \sum_{m=-M}^M (|w_m| + |\ddot{w}_m| + |\tilde{w}_m|) \quad (56)$$

Stabilität ist sichergestellt, wenn

$$\frac{\Delta t^2}{2h^2} \sum_{m=-M}^M |w_m| + |\ddot{w}_m| + |\tilde{w}_m| \leq 4 \quad (57)$$

ist.

Umformen der Gleichung liefert unter Verwendung der Definition von  $a_2$  die Behauptung (47).  $\square$

Der folgenden Tabelle sind die Bedingungen für die Stabilität von 1,2 und 3 dimensionalen Wellengleichungen der Ordnungen 2 bzw. 4 zu entnehmen.

Dimension	2.Ordnung	3.Ordnung
1D	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2D	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{8}}$
3D	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$

speziell: 2-dim Wellengleichung 2.Ordnung:

Um bei einer Raumdiskretisierung  $h=0.5$  die Stabilität zu gewährleisten muss  $k \leq \frac{0.5}{\sqrt{2}} \approx 0.3536$ . Das Verfahren ist für  $k=0.35$  stabil und für  $k=0.36$  instabil. Vergleich hierzu die angeführten Figuren.

Die Numerische Lösung der 2dim Wellengleichung wurde mit Matlab in dem folgenden Programm (welle2.m) realisiert.

```

%Loesen der Gleichung u nach tt - u nach xx - u nach yy = 0
%Loesen der Gleichung u nach tt - u nach xx - u nach yy = f

%-----Benutzereingaben-----
xa=-10;%Grenzen des xy-Feldes
xe=20; ya=-10; ye=20;
h=0.5;      % Raumdiskretisierung
k=0.35;     % Zeitdiskretisierung (stabil)
%k=0.36;    % Zeitdiskretisierung (unstabil)
tend=50;    % Zeitliches Ende
f='homogen';% homogen oder inhomogen
omeg=0.8;   % Parameter fr inhomogenen Teil
%-----

%innere Feld
x=xa+h:h:xe-h; y=ya+h:h:ye-h; [X,Y]=meshgrid(x,y);

%ganzes Feld (Rand dabei)
xx=[xa,x,xe]; yy=[ya,y,ye]; [XX,YY]=meshgrid(xx,yy);

%diverse Gren
t=0; p=k/h;
n=length(x); % Anzahl der inneren Gitterp in x-Richtung
nn=length(xx);% n+2
I=2:n+1;

%Anfangsbedingung setzen zur Zeit t=0
u_0=exp(-(X-5).^2-(Y-5).^2); u_0=[zeros(n,1),u_0,zeros(n,1)];
u_0=[zeros(1,n+2);u_0;zeros(1,n+2)]; mesh(XX,YY,u_0); axis([xx(1)
xx(nn) yy(1) yy(nn) -1 1]) pause

u_1=u_0; u=u_1; u_alt=u_0;

```



```

while t<tend+k

    switch f

        case 'inhomogen'

            F=sin(omeg*t)*exp(-10*((X-5).^2+(Y-5).^2))*(omeg*t);

            u_neu = p^2*(u(I-1,I)+u(I+1,I)+u(I,I-1)+u(I,I+1))
                + (2-4*p^2)*u(I,I) - u_alt(I,I) + F*k^2;

        case 'homogen'

            u_neu = p^2*(u(I-1,I)+u(I+1,I)+u(I,I-1)+u(I,I+1))
                + (2-4*p^2)*u(I,I) - u_alt(I,I);

        otherwise

            u_neu = p^2*(u(I-1,I)+u(I+1,I)+u(I,I-1)+u(I,I+1))
                + (2-4*p^2)*u(I,I) - u_alt(I,I);

    end

    u_alt=u;
    u=u_neu;

    u=[zeros(n,1),u,zeros(n,1)]; %Randwerte setzen
    u=[zeros(1,n+2);u;zeros(1,n+2)];

    mesh(XX,YY,u)
    axis([xx(1) xx(nn) yy(1) yy(nn) -1 1])

    title(t)
    pause(0.02)

    t=t+k;

end

```

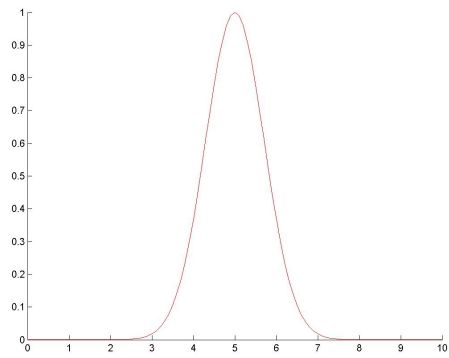


Figure 1: Anfangsbedingung

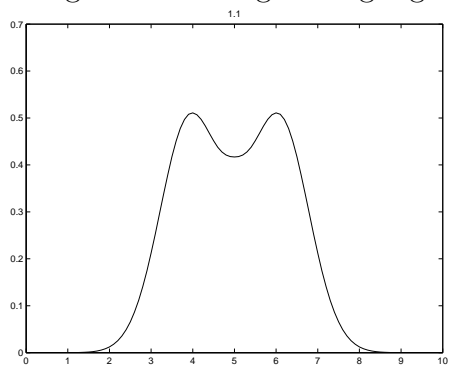


Figure 2: Zeitpunkt 1.1

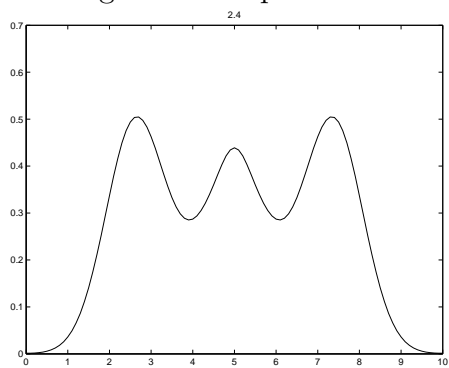


Figure 3: Zeitpunkt 2.4

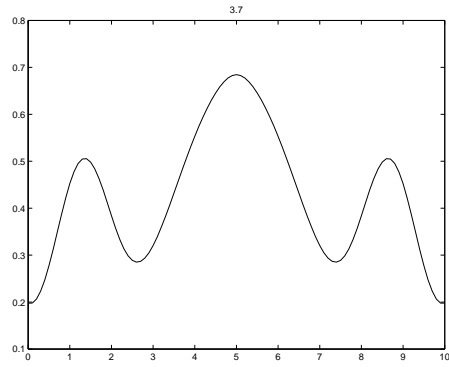


Figure 4: Zeitpunkt 3.7

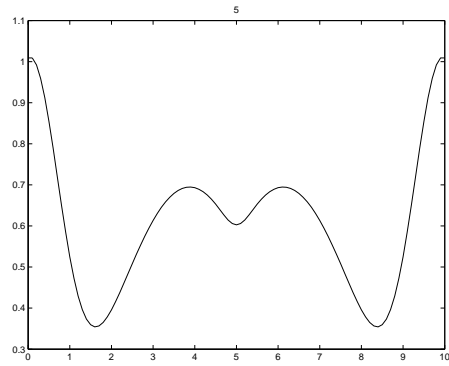


Figure 5: Zeitpunkt 5

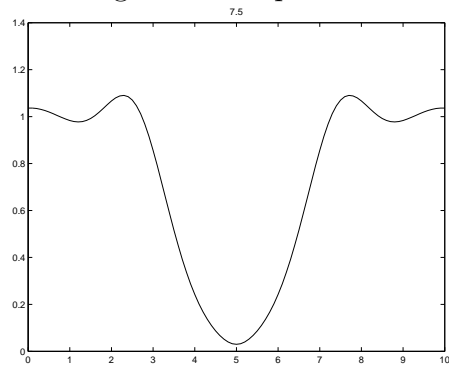


Figure 6: Zeitpunkt 6

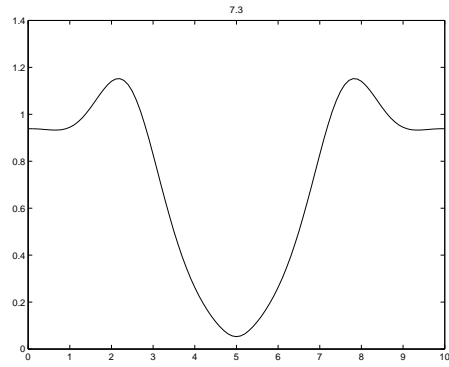


Figure 7: Zeitpunkt 7.3

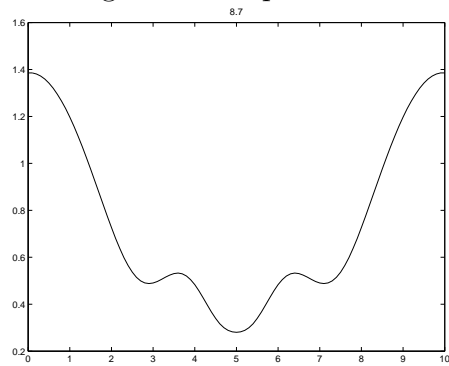


Figure 8: Zeitpunkt 8.7

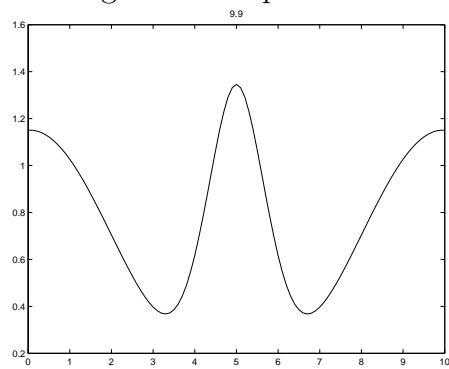


Figure 9: Zeitpunkt 9.9

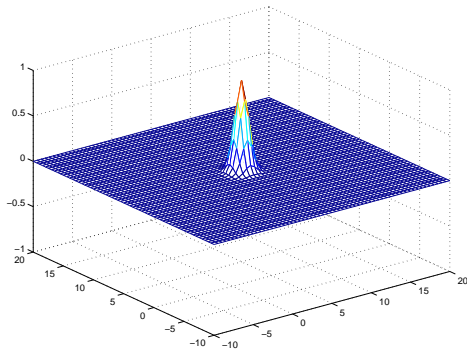


Figure 10: homogen  $t=0$  sec

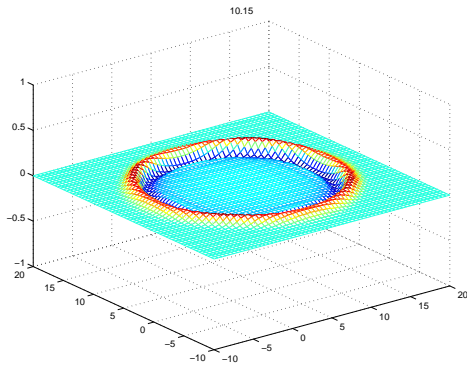


Figure 11: homogen stabil  $t=10$  sec

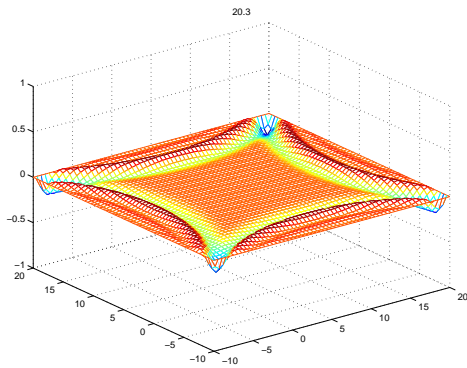


Figure 12: homogen stabil  $t=20$  sec

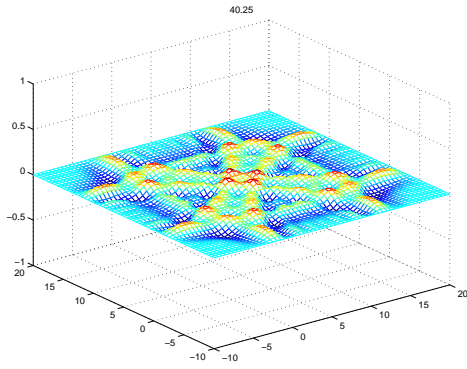


Figure 13: homogen stabil t=40 sec

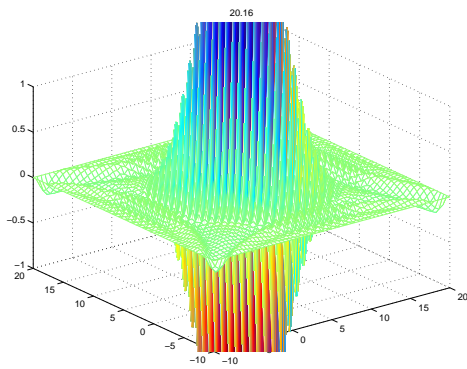


Figure 14: homogen instabil t=10 sec

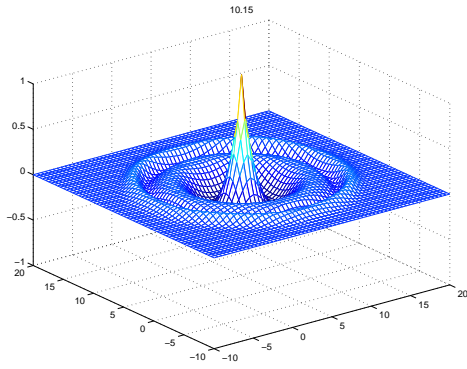


Figure 15: inhomogen stabil  $t=10$  sec

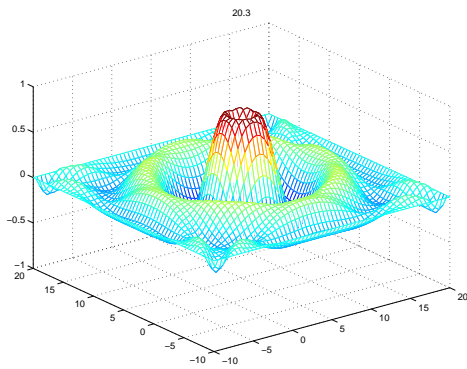


Figure 16: inhomogen stabil  $t=20$  sec

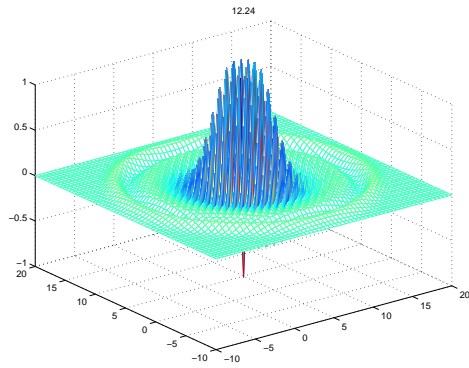


Figure 17: inhomogen instabil  $t=12$  sec