Karl-Franzens-Universität Graz
Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen
Heinrichstr. 36, A-8010 Graz, Österreich

Differentialgleichungen für LAK

Vorlesungsmitschrift von Gerald Groicher
aus dem WiSe 2002/2003 Vorlesung von Dr. Alfio Borzi
erstellt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Differentialgleichungen

1.1 Einleitung

Egal, ob Physik, Biologie, Chemie oder Wirtschaft - die Evolution von Systemen kann mit Lösungen von Differentialgleichungen beschrieben werden. Modellierung hat die Aufgabe, Differentialgleichungen zu definieren, deren Lösungen ein beobachtetes Verhalten wiedergeben.

Beispiel: Freier Fall

Sei $s(t)$ die Entfernung eines Körpers K von seiner ursprünglichen Position:

- Die erste Ableitung $v(t) = s'(t)$ heißt **Geschwindigkeit**.
- Die zweite Ableitung $a(t) = s''(t)$ heißt **Beschleunigung**.

Der Freie Fall wird durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben:

$$s'' = -g \qquad g \text{ ist die Gravitationskonstante.}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$s(t) = c_1 + c_2 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Angenommen der Körper befinde sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhelage in der Höhe H, so haben wir $s(0) = H,\ s'(0) = 0$.

Aus $s(0) = H$ folgt somit $c_1 = H$;
Aus $s'(0) = 0$ folgt $c_2 = 0$.

Das resultierende Anfangswertproblem hat also die Lösung

$$s(t) = -\frac{1}{2}\, g t^2 + H$$

Beispiel: Haifische und Sardellen

Sei $h(t)$ die Menge der Haifische zur Zeit t und $s(t)$ die Menge der Sardellen zur Zeit t:
Würden diese beiden Spezies getrennt leben, hätte man:

$h'(t) = -ah(t)$	Die Haifische fressen sich gegenseitig, wenn es keine Sardellen gibt.
$s'(t) = bs(t)$	Die Sardellen vermehren sich ungestört, wenn es keine Haifische gibt.

Allerdings im Zusammenleben:

$h'(t) = -ah(t) + ch(t)s(t)$	Je mehr Sardellen, desto mehr Futter für die Haifische.
	$\Rightarrow$ Die Zahl der Haifische steigt.
$s'(t) = bs(t) - ds(t)h(t)$	Je mehr Haifische auf Sardellen treffen,
	umso weniger Sardellen gibt es.

Wir haben folgende Dynamik:

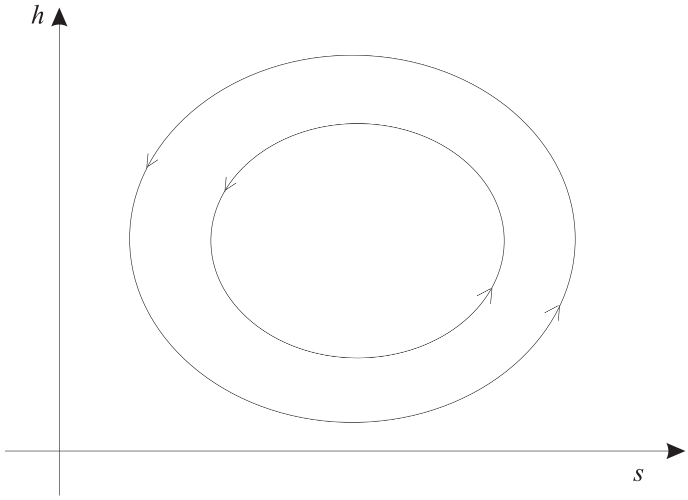


Abbildung 1.1: Dynamik

Rein formell versteht man unter einer Differentialgleichung eine Gleichung, in der unabhängige Variable, Funktionen und Ableitungen von Funktionen auftreten.

Zum Beispiel:

$$\text{Es sei } F(x,y,y') = 0 \qquad \text{wobei} \qquad F(x,y,y') = y' + 2xy \tag{1.1}$$

y ist die gesuchte differenzierbare Funktion.
Eine **Lösung** von (1.1) in einem Intervall I ist eine Funktion $y = y(x)$, für die (1.1) in I identisch gilt. Zum Beispiel

$$y(x) = e^{-x^2} \quad \rightarrow \quad F(x,y,y') \equiv 0 \quad \text{für } x \in I$$

Sämtliche Lösungen von (1.1) sind durch $y(x) = c \cdot e^{-x^2}$ gegeben. c ist eine Konstante, die vom Anfangswert bestimmt wird.

Die allgemeine Form für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung lässt sich immer in der Implizit-Form

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \tag{1.2}$$

schreiben.
Eine Lösung ist hier eine n-mal differenzierbare Funktion.
Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung in expliziter Form (Normalform) schreibt man

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{1.3}$$

Man nennt eine von x und n Parametern $c_1, ..., c_n$ abhängige Funktion $y(x, c_1, ..., c_n)$, die (1.3) erfüllt, **vollständiges Integral** oder **allgemeine Lösung** von (1.3). Zum Beispiel, sei $y'' = 3y' - 2y$ wobei $f(x, y, y') = 3y' - 2y$. Die resultierende Lösung ist $y(x, c_1, c_2) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Die geometrische Darstellung einer Lösung $y(x)$ wird **"Lösungskurve"** oder **Integralkurve** genannt.

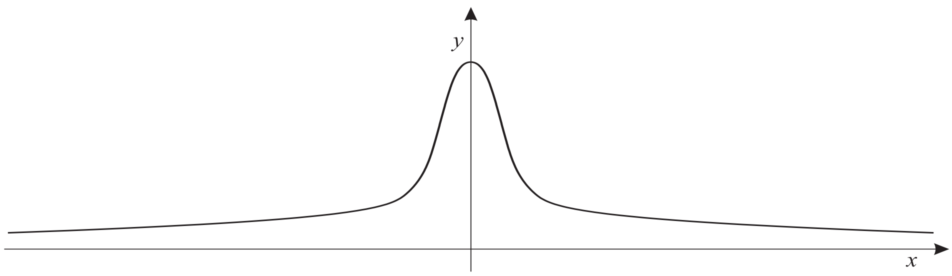


Abbildung 1.2: eine Lösungskurve

Die Schar von differenzierbaren Kurven, die Lösungen von einer Differentialgleichung sind, nennt man **"Kurvenschar"**:

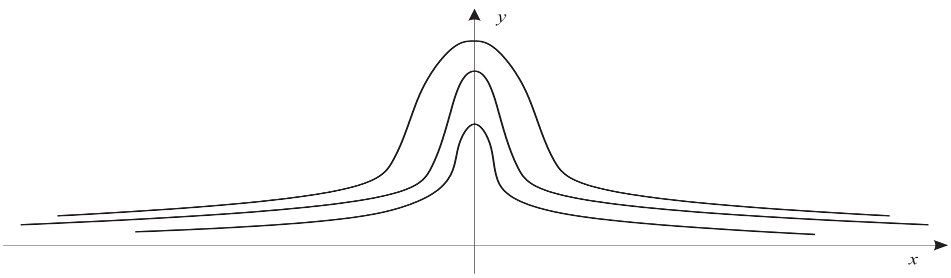


Abbildung 1.3: eine Kurvenschar

Die Parameter $c_1, ..., c_n$ **einer** Lösung $y(x, c_1, ..., c_n)$ werden durch **Anfangswerte** bestimmt.

Ein fester Punkt $x_0 \in I$ und die Werte

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ ...\ y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1} \tag{1.4}$$

sind gegeben. Man nennt (1.4) die **Anfangsbedingung**.

Das Problem (1.3) und (1.4) wird Anfangswertproblem (AWP) genannt.

Satz (Existenztheorem)

Sei f stetig im Intervall I; dann hat das Anfangswertproblem **(1.3) und (1.4)** in einer Umgebung von x_0 zumindest eine Lösung.

Beispiel 1:

$y'' = 3y' - 2y \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
$\Rightarrow \qquad y = -e^x + e^{2x}$.

Beispiel 2:

$y' = 2\sqrt{y} \qquad y(0) = 0$
$\Rightarrow \quad y \equiv 0, \quad y = x^2$
sind beide Lösungen des Anfangswertproblems.
Die Stetigkeit von f genügt aber nicht für die Eindeutigkeit!

Kapitel 2

Qualitative Theorie

Wir betrachten hier die explizite Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

Die Funktion $y(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung. Die Differentialgleichung (2.1) gestattet eine geometrische Interpretation . Geht eine Lösungskurve durch den Punkt (x_0, y_0), d.h. $y(x_0) = y_0$, so beträgt ihre Steigung an dieser Stelle $y' = f(x_0, y_0)$. Es ist $\tan\alpha = f(x_0, y_0)$.

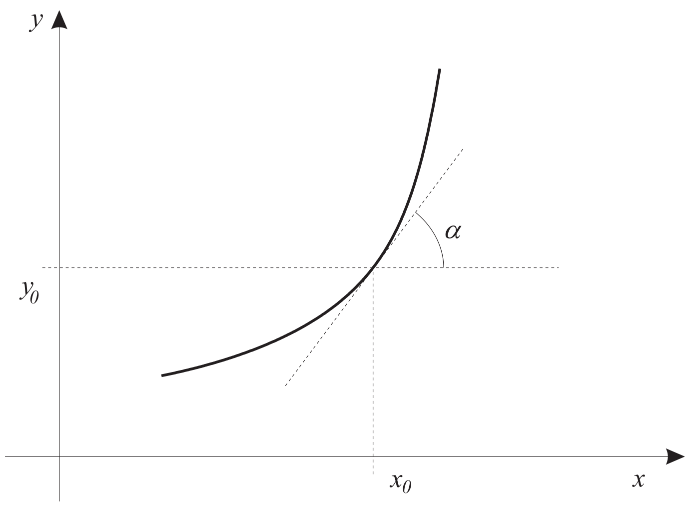


Abbildung 2.1: Steigung an der Stelle (x_0, y_0)

In diesem Kontext wird ein Zahlentripel (x, y, p) nun so gedeutet, dass p die Steigung einer durch den Punkt (x, y) gehenden Geraden angibt. Man nennt dieses Tripel **Linienelement**. Die Gesamtheit aller Linienelemente der Form $(x, y, f(x, y))$ ist ein **Richtungsfeld**.
Natürlich "passt" eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung auf das Richtungsfeld ($\tan\alpha = f(x, y)\ \forall x$).
Ist umgekehrt eine Schar von differenzierbaren Kurven gegeben, welche die Menge D schlicht überdeckt, so lässt sich dieser Kurvenschar auch eine Differentialgleichung zuordnen.
Die Kurven $f(x, y) = const.$, auf denen das Richtungsfeld konstante Steigung hat ($p = const.$), werden **Isoklinen** genannt.

Beispiele:

1. $y' = f(x)$ Richtungsfeld abhängig von x ... Lösungstyp: $y = \Phi(x) + c$. (Achtung! Die Isoklinen sind vertikal!)

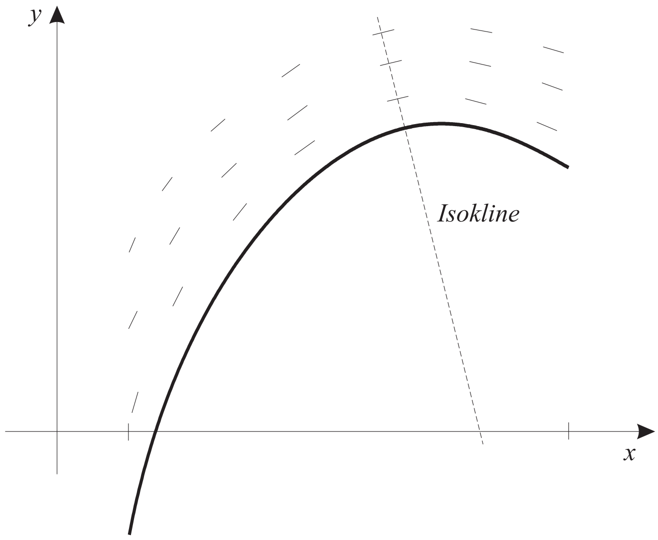


Abbildung 2.2:

2. $y' = g(y)$ Richtungsfeld abhängig von y ... Lösungstyp: $y = \Phi(x + c)$
Sei $y(x)$ Lösung der Differentialgleichung, dann ist auch $y(x+c)$ Lösung der Differentialgleichung.

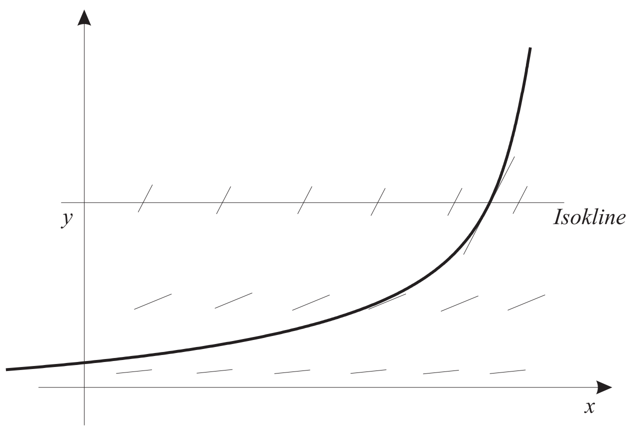


Abbildung 2.3:

3. $y' = f(x, y)$ z.B.: $y' = -xy$ Richtungsfeld von x und y abhängig.

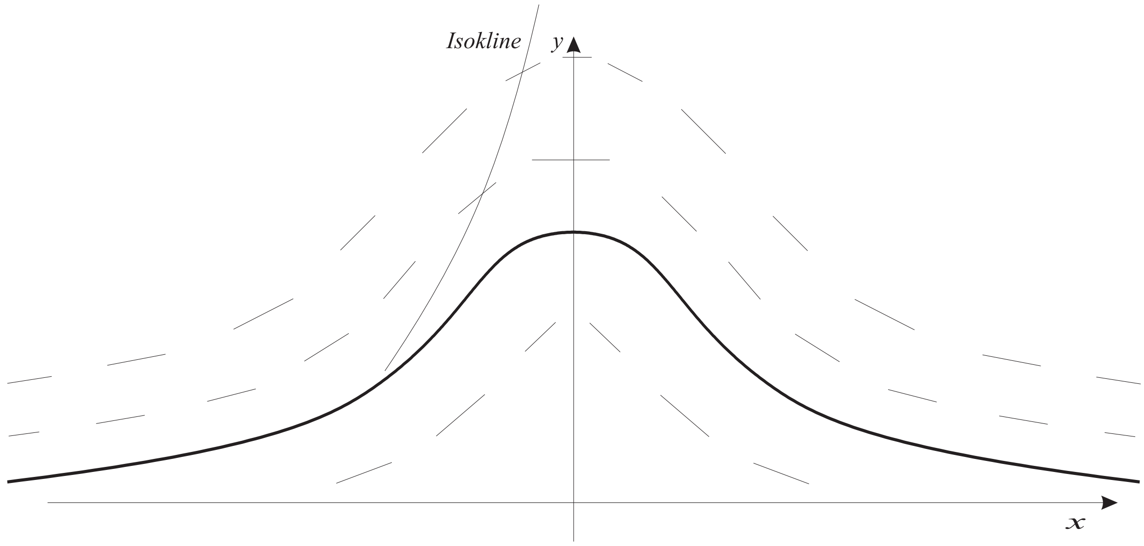


Abbildung 2.4:

2.1 Begriffsdefinitionen

Anhand von Richtungsfeldern können wir Lösungen zeichnen. Um ihr Verhalten zu untersuchen führen wir neu Begriffe ein:

Trichter: Lösungen können sich asymptotisch ($x \to +\infty$) an eine Kurve $\overline{y}(x)$ annähern.

Abbildung (2.5) zeigt die Lösungskurve für $y' = 2y - y^2$. Sie nähern sich der Kurve $\overline{y}(x) = 2$ für $x \to +\infty$

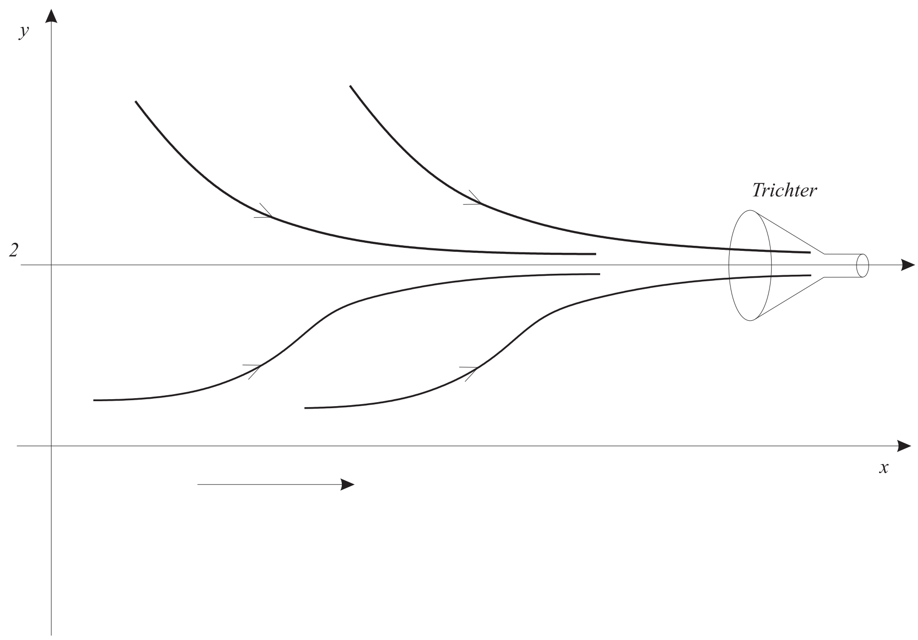


Abbildung 2.5: Trichter

Antitrichter: Umgekehrt charakterisiert ein Antitrichter eine Kurve $\overline{y}(x)$, von deren Umgebung sich die Lösungen für $x \to +\infty$ entfernen (Trichter für $x \to -\infty$).

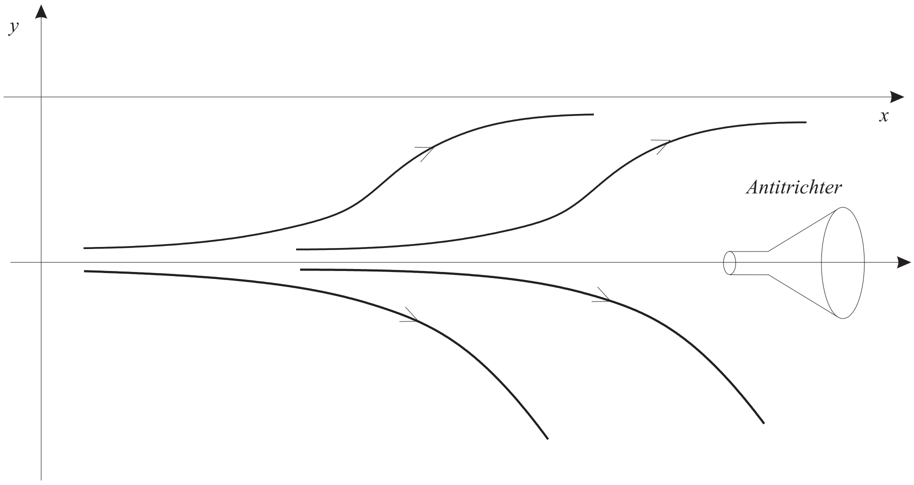


Abbildung 2.6: Antitrichter

Vertikale Asymptoten: $y' = ky^2,\ k > 0$
$y(x) = \frac{1}{c-kx}$

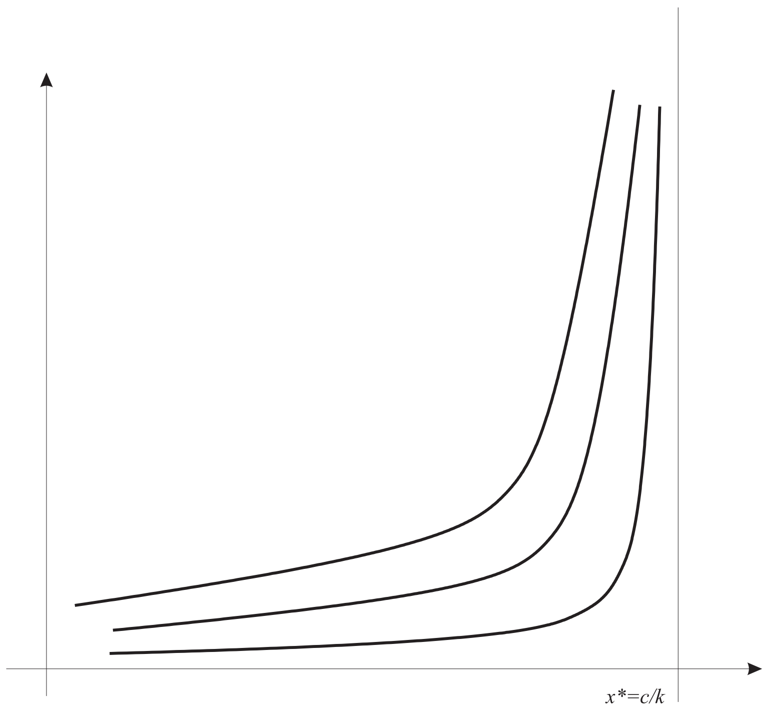


Abbildung 2.7: Vertikale Asymptoten

Allgemein: $y' = ky^{\alpha}$ hat vertikale Asymptote für $\alpha > 1$.

Zäune: Für eine Differentialgleichung wird eine stetig differenzierbare Funktion $\alpha(x)$ **Unterer Zaun** (Unterfunktion) genannt, wenn

$$\alpha'(x) \leq f(x, \alpha(x)) \quad x \in I \tag{2.2}$$

Für eine Differentialgleichung wird eine stetig differenzierbare Funktion $\beta(x)$ **Oberer Zaun** genannt, wenn

$$\beta'(x) \geq f(x, \beta(x)) \quad x \in I \tag{2.3}$$

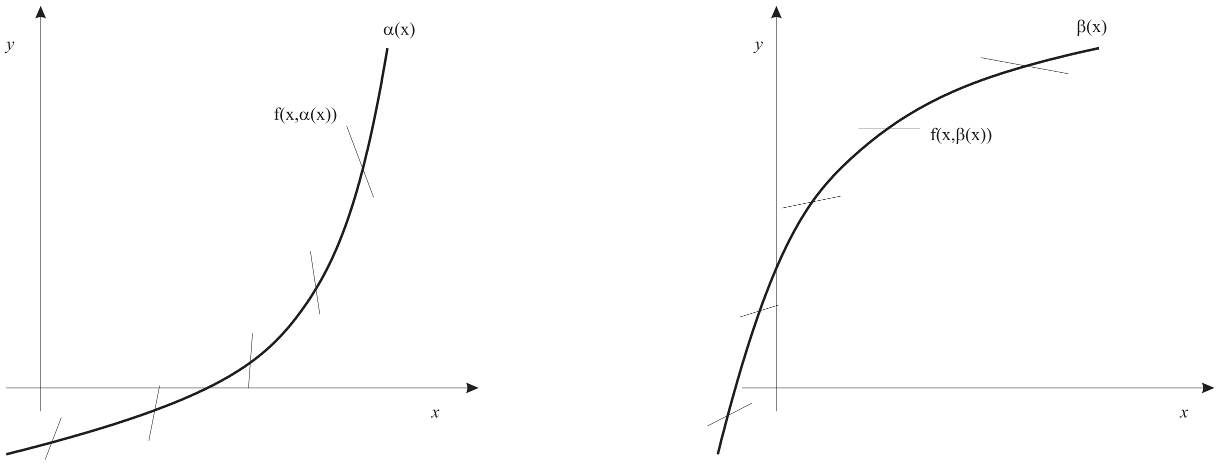


Abbildung 2.8: Unterer Zaun $\alpha(x)$ und Oberer Zaun $\beta(x)$

Falls $\alpha(x) < \beta(x)$ für $x \in I$, dann ist der Bereich $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$ ein Trichter.
Falls $\alpha(x) > \beta(x)$ für $x \in I$, dann ist der Bereich $\alpha(x) \geq y \geq \beta(x)$ ein Antitrichter.

Satz: (Trichter)

Falls die Funktionen $\alpha(x) < \beta(x)$ einen Trichter bilden und $y(x)$ eine Lösung von $y' = f(x, y)$ ist mit $\alpha(x^*) < y(x^*) < \beta(x^*)$, dann ist $\alpha(x) < y(x) < \beta(x)$ für alle $x \geq x^*$.

Satz: (Antitrichter)

Falls die Funktionen $\alpha(x) > \beta(x)$ einen Antitrichter bilden, dann gibt es zumindest eine Funktion $y(x)$, Lösung von $y' = f(x, y)$, sodass $\beta(x) \leq y(x) \leq \alpha(x)$ für alle $x \in I$.

Dispersion: $y' = f(x, y)$

Die Dispersion $\frac{\partial f}{\partial y}$ misst, wie schnell die Linienelemente auseinander ($\frac{\partial f}{\partial y} > 0$) oder ineinander ($\frac{\partial f}{\partial y} < 0$) gehen.

Wenn $\frac{\partial f}{\partial y} \approx 0$, stehen die Lösungen zusammen.

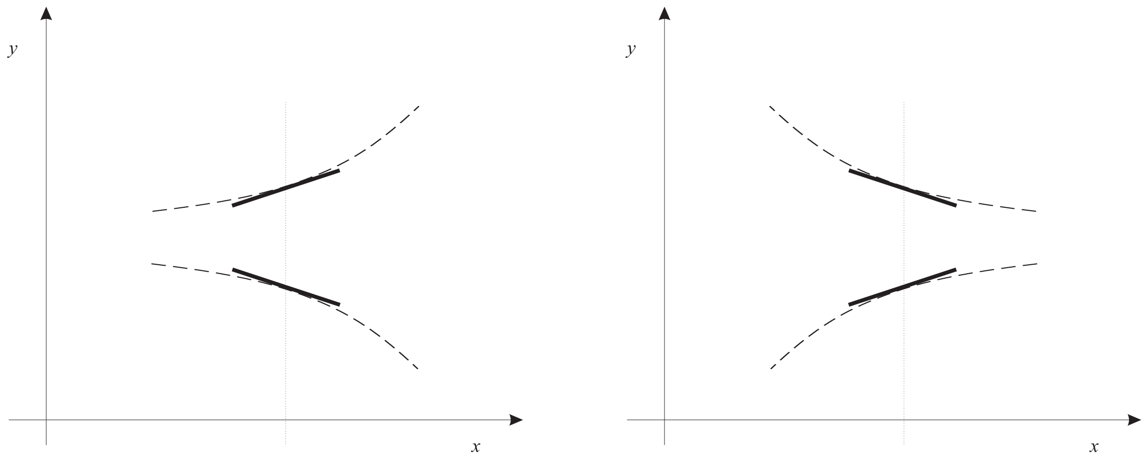


Abbildung 2.9: links: $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ und rechts: $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$

<u>Satz:</u> (Eindeutigkeit)

Falls $\alpha(x) > \beta(x)$ für $x \in I$ einen Anti-Trichter definieren <u>und</u> falls

$$\lim_{x\to\infty} |\alpha(x) - \beta(x)| \longrightarrow 0 \quad \underline{\text{und}} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \geq 0,$$

dann gibt es nur eine Lösung y von $y' = f(x, y)$, die im Anti-Trichter bleibt (für $x \to +\infty$).

Kapitel 3

Elementar lösbare Beispiele

Wir bleiben bei $y' = f(x, y)$ und lernen Lösungsverfahren:

3.1 Gleichungen vom Typ 1: $y' = f(x)$

Durch den Hauptsatz der Differential-Integral-Rechnung ist, wenn $x_0 \in I$ fest gewählt wird

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Alle Lösungen sind in der Form

$$y = \phi(x) + c \qquad \text{(Konstante wird durch Anfangsbedingung bestimmt)}$$

Vertikalen Isoklinen.

3.2 Gleichungen vom Typ 2: $y' = f(y)$

Sei $f(y) \neq 0$: Man kann folgende formale Berechnung führen:

$$y' = f(y), \qquad \frac{dy}{dx} = f(y) \quad \frac{dy}{f(y)} = dx$$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx = x + c$$

$$\text{also:} \qquad \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} = x + c$$

$$F(y, y_0) = x + c$$

Horizontalen Isoklinen.

3.3 Gleichungen vom Typ 3: $y' = f(x) \cdot g(y)$

Getrennte Veränderliche:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad & \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \\
\Leftrightarrow \quad \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{g(y)} \quad &= \quad \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \\
\Longrightarrow \quad \text{Lösung:} \quad G(y) \quad &= \quad F(x) + C
\end{aligned}$$

Satz: (Anfangswertproblem für $y' = f(x)g(y)$)

Sei $f(x)$ in I_{x_0} stetig, $g(y)$ in I_{y_0} stetig und $g(y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung von $x_0, \widetilde{I}_{x_0}$, in der das Anfangswertproblem $y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$ genau eine Lösung $y(x)$ besitzt.
Falls $g(y_0) = 0$, gibt es die Lösung $y(x) = y_0$, weitere Lösungen können eintreten.

3.4 Gleichungen vom Typ 4: $y' = f(ax + by + c) \quad b \neq 0$

Man setzt:

$$\begin{aligned}
u &= ax + by + c \quad \text{so gilt für } u \\
u' &= a + by' \\
u' &= a + b \cdot f(u) \quad \Longrightarrow \quad \text{siehe Typ 2...y'=f(y)}
\end{aligned}$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned}
y' &= (x+y)^2 \quad \text{mit } u = x + y \\
u' = 1 + u^2 \quad &\Rightarrow \quad u = \tan(x + c) \\
\Rightarrow y(x; c) &= \tan(x + c) - x
\end{aligned}$$

3.5 Gleichungen vom Typ 5: $y' = f(\frac{y}{x})$

Homogene Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\text{Man setzt: } u : &= \frac{y}{x} \ (x \neq 0) \\
y = ux \quad &\Rightarrow \quad y' = u' \cdot x + u \\
u'x + u &= f(u) \\
\Rightarrow \quad u' &= \frac{1}{x}(f(u) - u)
\end{aligned}$$

Also eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen wie bei Typ 3.

- Beispiel:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}, y(1) = 1; \\
\text{wird zu } u' &= -\frac{1}{xu^2}, u(u) = 1; \\
\int_1^u u^2 u' \; dx &= -\int_1^x \frac{1}{x} \; dx \\
\text{d.h.: } \frac{u^3 - 1}{3} &= -\lg x \\
\Rightarrow y &= x\sqrt[3]{1 - 3\lg x}
\end{aligned}
$$

3.6 Gleichungen vom Typ 6: $y' = p(x)y + q(x)$

Wir betrachten allgemeine lineare Differentialgleichung der Form $y' = p(x)y + q(x)$ wobei die Funktionen $p(x), q(x)$ stetig im Intervall I sind. Ist $q(x) \equiv 0$, so spricht man von einer **homogenen Differentialgleichung**, andernfalls von einer **inhomogenen**.
Die homogene Differentialgleichung $y' = p(x)y$ gehört zum Typ 3 - getrennte Veränderliche. So erhält man eine Schar von Lösungen

$$
y(x, c) = c \cdot e^{P(x)} \quad \text{mit} \quad P(x) = \int_{x_0}^x p(\tau) \; d\tau \quad x_0 \in I
$$

Wie bei Typ 3 gibt es nur eine Lösung des Anfangswertproblems. Falls $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$, gibt es nur die Lösung $y(x) = 0$, keine weiteren Lösungen sind möglich. Die Lösung des **AWP** lautet:

$$
y(x) = y_0 \cdot \exp\{\int_{x_0}^x p(\tau) \; d\tau\}
$$

Sie existiert in ganz I.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y' = p(x)y + q(x)$ ist gegeben durch

$$
y(x) = y(x, c) + y_p(x)
$$

wobei $y(x, c)$ die Lösung von $y' = p(x)y$, also vom homogenen Teil der Differentialgleichung ist und $y_p(x)$ ist **eine** Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.
Um eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bestimmen, verwendet man die sogenannte **Methode der Variation der Konstanten**.

3.7 Methode der Variation der Konstanten

Sie besteht darin, dass man in der allgemeinen Lösung $y(x, c) = c \cdot e^{P(x)}$ der homogenen Differentialgleichung die Konstante c durch eine Funktion $c(x)$ ersetzt. Der Ansatz lautet also

$$
y(x) = c(x) \cdot e^{P(x)}
$$

$$\begin{aligned} \text{man hat} \quad y' - py &= c'\,e^{P(x)} + c\,p\,e^{P(x)} - p\,c\,e^{P(x)} \\ y' - py &= c'\,e^{P(x)} := q(x) \quad \text{also:} \end{aligned}$$

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} q(x)e^{-P(x)}dx \quad , \quad P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)dt$$

Daher folgt, dass das Anfangswertproblem

$$y' = p(x)y + q(x) \quad \text{mit } y(x_0) = y_0 \tag{3.1}$$

wenn die Funktionen $p(x), q(x)$ in I stetig sind und $x_0 \in I$ genau eine Lösung hat.

$$y(x) = e^{P(x)} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{-P(t)}dt \right\} \tag{3.2}$$

Beweis:
Die durch (3.2) gegebene Funktion ist offenbar die Lösung von (3.1).
Die Eindeutigkeit ergibt sich aus folgenden Überlegungen:
Seien y_1 und y_2 Lösungen von (3.1), so ist $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$ Lösung von $z' = p(x)z$ mit dem Anfangswert $z(x_0) = 0$. Diese hat eine eindeutige Lösung $z(x) \equiv 0$, d.h.: $y_1(x) = y_2(x),\ x \in I$.

Beispiel:

$$y' = ay + b, \quad y(x_0) = y_0 \qquad P(x) = \int_{x_0}^{x} a\ dt = a(x - x_0)$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{a(x-x_0)} \cdot \left\{ \int_{x_0}^{x} be^{-a(t-x_0)}\ dt + y_0 \right\} \\ &= e^{a(x-x_0)} \cdot \left\{ y_0 + \left(\frac{b}{a}\right) \cdot \left(1 - e^{-a(x-x_0)}\right) \right\} \end{aligned}$$

3.8 Methode der unbestimmten Koeffizienten

Abhängig davon, welcher Klasse die Funktion $q(x)$ angehört und falls $p(x)$ eine Konstante ist, kann man eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mithilfe der sogenannten **Methode der unbestimmten Koeffizienten** gewinnen.

Sei $q(x)$ in einer der folgende Klassen

$$q(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x \tag{3.3}$$

$$q(x) = a + bx + cx^2 + \ ... \tag{3.4}$$

$$q(x) = e^x + axe^x + bx^2e^x + \ ... \tag{3.5}$$

Beispiele:

$y' = py + q(x)$	$y_p(x)$
$y' = y + \sin x$	$-\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$
$y' = y + x^2$	$-(2 + 2x + x^2)$
$y' = e^{2x}$	e^{2x}

$q(x)$	$y_p(x)$
$\alpha \sin x + \beta \cos x$	$a \sin x + b \cos x$
$\alpha + \beta x + \gamma x^2$	$a + bx + cx^2$
$\alpha e^{\beta x}$	$a e^{\beta x}$

3.9 Die BERNOULLI-Differentialgleichung

BERNOULLI-Differentialgleichungen sind gegeben in der Form

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0 \qquad (\alpha \neq 1, \alpha \neq 0) \tag{3.6}$$

Die Funktionen g und h seien stetig in I. Im Fall $\alpha > 0$ ist (3.6) sicher definiert für $y \geq 0$; $y \equiv 0$ ist eine Lösung. Für ganze Zahlen α ist auch $y < 0$ zugelassen. Multipliziert man (3.6) mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$, so erhält man

$$(y^{1-\alpha})' + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) = 0 \tag{3.7}$$

Für die Funktion $z = y^{1-\alpha}$ ergibt sich dann folgende lineare Differentialgleichung

$$z' + \underbrace{(1-\alpha)g(x)}_{-p(x)} z + \underbrace{(1-\alpha)h(x)}_{-q(x)} = 0 \tag{3.8}$$

Ist eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ vorgegeben, so hat man $z(x_0) = y_0^{1-\alpha}$ vorzuschreiben. Gleichung (3.8) ist vom Typ 6.

Wir haben folgende möglichkeiten:

$$(-y)' + g(-y) \pm h(-y)^\alpha = 0 \begin{cases} + & \alpha \text{ ungerade} \\ - & \alpha \text{ gerade} \end{cases}$$

α **ungerade:** Mit y ist auch $-y$ eine Lösung von (3.6)

$$y = \pm |z(x)|^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad \alpha \neq 1$$

α **gerade:** Mit y ist auch $-y$ mit h ersetzt durch $-h$ eine Lösung

$$y = (\text{sign } z) \cdot |z|^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned}
y' + (\frac{1}{1+x})y + (1+x)y^4 &= 0 \qquad\qquad \alpha = 4 \text{ (gerade)} \\
z = y^{1-\alpha} &= \frac{1}{y^3} \\
z' - \frac{3}{1+x}z - 3(1+x) &= 0 \\
z &= c(1+x)^3 \quad \text{Lösung der obige homogenen Gleichung} \\
z_p &= -3(1+x)^2 \quad \text{particuläre Lösung der obige Gleichung} \\
z &= c(1+x)^3 - 3(1+x)^2 \\
y(x,c) &= |z|^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{sign } (z) = \\
y(x,c) &= \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2 |c(1+x) - 3|}} \underbrace{\text{sign } (c(1+x) - 3)}_{\text{hängt vom AWP ab}}
\end{aligned}$$

AWP für obiges Beispiel:

$$y' + (\frac{1}{1+x})y + (1+x)y^4 = 0$$

$$\begin{aligned}
y(0) = -1 &\implies c - 3 = -1 \Rightarrow c = 2 \\
\implies y(x) &= -\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-2x)}} \qquad \text{... Lösung}
\end{aligned}$$

definiert in $-1 < x < \frac{1}{2}$

3.10 RICCATI-Differentialgleichung

Riccati Differentialgleichungen sind in der Form

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x) \qquad \text{mit } g, h, k \text{ stetig in } I$$

Die Lösungen diese Differentialgleichungen lassen sich - von Sonderfällen abgesehen - nicht in geschlossener Form angeben. Kennt man jedoch eine Lösung φ, so sind die übrigen explizit berechenbar mit Hilfe der Substitution $y(x;c) = \varphi(x) + u(x,c)$. Die resultierende Differentialgleichung für u ist

$$u' + [g + 2\varphi h]u + hu^2 = 0$$

also u genügt einer BERNOULLI-Differentialgleichung mit $\alpha = 2$.

- Beispiel:

$$\begin{aligned}
y' + \frac{2x+1}{x}y - \frac{1}{x}y^2 &= x + 2 \\
\Longrightarrow g(x) = \frac{2x+1}{x} \qquad & h(x) = -\frac{1}{x} \qquad k(x) = x + 2 \\
\Longrightarrow \varphi(x) &= x \qquad \text{... eine Lösung} \\
y &= x + u \\
y' &= 1 + u' \\
1 + u' + \left(\frac{2x+1}{x}\right)(x+u) - \frac{1}{x}(x+u)^2 &= x + 2 \\
(*) \quad u' + \frac{1}{x}u - \frac{1}{x}u^2 &= 0 \quad \text{Bernoulli-Gleichung, } \alpha = 2 \\
z = u^{1-\alpha} \cdot \frac{1}{u} \quad &, \quad z' = \frac{1}{u^2} \cdot u' \\
(*) \mid \cdot \left(x - \frac{1}{u^2}\right) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{-u^2}u' - \frac{1}{x}\frac{1}{u^2}u + \frac{1}{x}\frac{1}{u^2}u^2 = 0 \\
z' - \frac{1}{x}z + \frac{1}{x} &= 0 \\
\Rightarrow z &= 1 + cx \\
\Rightarrow u = \frac{1}{z} &= \frac{1}{1+cx} \\
\Rightarrow y = x + u &= x + \frac{1}{1+cx}
\end{aligned}$$

3.11 Implizite Differentialgleichung erster Ordnung

Wir betrachten die implizite Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{in } D \subset \mathbb{R}^3 \tag{3.9}$$

wobei F in D stetig ist.
Die Differentialgleichung (3.9) definiert ein Richtungsfeld für

$$F(x, y, p) = 0.$$

Jetzt kann ein Punkt (x, y) Träger von mehreren Linienelementen sein.
Ist $F(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}) = 0$ und (3.9) besitzt in einer Umgebung von $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p})$ eine eindeutige Auflösung in der Form

$$p = f(x, y) \quad \text{mit stetigem } f(x, y),$$

so ist $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p})$ ein regulärer Punkt. Andernfalls wird er singulärer Punkt genannt.

Implizit-Satz:

Sind in einer Umgebung von $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}) \in \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^3$ die Funktionen $F(x, y, p)$ und $F_p(x, y, p)$ stetig, und ist

$$F(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}) = 0, \quad F_p(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}) \neq 0$$

so ist $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p})$ ein regulärer Punkt.

- Beispiel: Sei $F(x, y, y') = y'^2 - 4x^2$

$$\begin{array}{rcl} \Longrightarrow F(x,y,p) & = & p^2 - 4x^2 \\ F(x,y,p) = 0 \quad \Longrightarrow p^2 - 4x^2 & = & 0 \qquad \Rightarrow \quad p = \pm 2x \\ \text{Ableitung davon} \;:\; F_p(x,y,p) & = & 2p \quad \neq 0, \text{ falls } p \neq 0 \\ \text{daraus folgt:} & & \left\{ \begin{array}{l} y' = +2x \;\ldots..\; y = +x^2 + c \\ y' = -2x \;\ldots..\; y = -x^2 + c \end{array} \right. \text{ ist dessen Lösung.} \end{array}$$

3.12 Das Differential

Sei $z = f(x, y)$ eine Funktion von (x, y). Das Differential von z ist gegeben durch

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{3.10}$$

Falls $P(x, y) = P(x)$, $Q(x, y) = Q(y)$, so sind sämtliche Lösungen von (3.10) gegeben durch

$$\Rightarrow \int P(x)dx - \int Q(y)dy = C$$

Beispiel 1:

$$2x\ dx - 9y^2\ dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Lösung: } x^2 - 3y^3 = C$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}
x \cos y\ dx + \sqrt{x+1} \sin y\ dy &= 0 \\
\text{Wenn } y \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots \text{ und } x > -1 & \\
\text{haben wir } \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy &= 0 \\
\Rightarrow \quad \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-1} - \lg|\cos y| = C & \quad , \quad x > -1,\ y \neq \pm\frac{k}{2}\pi \quad (k = 1, 3, 5, \ldots)
\end{aligned}$$

Die Funktionen $y = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$ sind auch Lösungen.

3.13 Exakte Differentialgleichungen

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' + \frac{x}{y} = 0$$

Lösungen dieser Gleichung sind

$$y(x, c) = \pm\sqrt{c^2 - x^2}$$

im offenen Intervall $-|c| < x < |c|$.
In den Punkten $x = \pm c$ wird $y = 0$ und y' unendlich - die Differentialgleichung verliert ihren Sinn.
Zur Vermeidung solcher Schwierigkeiten stellt man Kurven in symmetrischer Form dar, also entweder implizit

$$F(x, y) \equiv C \qquad (z.B.:\ x^2 + y^2 = c^2)$$

oder in Parameterdarstellung

$$x = x(t),\ y = y(t).$$

Entsprechend lautet die Darstellung einer Differentialgleichung erster Ordnung wie folgt:

$$g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0 \quad (z.B.:\ xdx + ydy = 0) \tag{3.11}$$

oder

$$g(x, y)\dot{x} + h(x, y)\dot{y} = 0 \quad \text{mit } x = x(t), y = y(t) \tag{3.12}$$

Vorauszusetzen ist: $g^2 + h^2 > 0$.
Die Gleichung (3.12) ist hier invariant gegenüber einer Parametertransformation $(t \to \tau)$.
Man nennt eine Differentialgleichung der Form (3.11) im Gebiet $D \in \mathbb{R}^2$ exakt, wenn (g, h) ein Gradientenfeld ist, d.h.: wenn eine in $D \in \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbare Funktion $F(x, y)$ existiert, sodass

$$F_x(x, y) = g(x, y) \text{ und } F_y(x, y) = h(x, y) \quad in\ D. \tag{3.13}$$

Das vollständige Differential einer Funktion F ist $dF = F_x\ dx + F_y\ dy$.

Eine Differentialgleichung ist also in D exakt, wenn man sie in der Form $dF(x,y) = 0$ mit $F \in C^1(D)$ schreiben kann. F wird **Stammfunktion** genannt.

Satz:

Die Funktionen g, h seien in D stetig und $g^2 + h^2 > 0$ in D. Ist die Differentialgleichung $g\ dx + h\ dy = 0$ in D exakt und ist $F = C^1(D)$ eine Stammfunktion ($F_x = g, F_y = h$), so erhält man durch Auflösen von $F(x,y) = c$ sämtliche Lösungen (Integralkurven) der Differentialgleichung.

- Beispiel:

$$\begin{aligned}
(2xy)dx + (x^2-1)dy &= 0 \\
g = 2xy \quad &, \quad h = x^2 - 1 \\
\Rightarrow F(x,y) = y(x^2-1), \quad &da \quad F_x(x,y) = 2xy \\
&\qquad\ \ F_y(x,y) = x^2 - 1
\end{aligned}$$

Über die Existenz und Konstruktion eine Stammfuntkion:

Satz:

Sind die Funktionen $g(x,y)$ und $h(x,y)$ in dem einfach zusammenhängenden (e.z.) Gebiet D stetig differenzierbar, so existiert eine Stammfunktion $F(x,y)$ mit der Eigenschaft $F_x(x,y) = g(x,y),\ F_y(x,y) = h(x,y)$ genau dann, wenn

$$g_y(x,y) = h_x(x,y), \quad (x,y) \in D \tag{3.14}$$

gilt. Man erhält eine Stammfunktion als Kurvenintegral

$$F(x,y) = \int\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \{g(x,y)dx + h(x,y)dy\}$$

Die Bedingung (3.14) (und e.z.) garantiert, dass dieses Integral vom Weg unabhängig ist.

Bemerkung:
Eine Differentialgeichung $y' = f(x,y)$ kann man in der Form (3.11) schreiben, wenn

$$f(x,y) = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)},$$

dann $F(x,y) = c$ definiert $y = y(x,c)$ in impliziter Form und wir haben

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)} = f(x,y)$$

also ist $y = y(x,c)$ Lösung von $y' = f(x,y)$.
Eine Anfangsbedingung bestimmt c: $F(x_0,y_0) = c$.

Falls $g_y \neq h_x$, ist es manchmal möglich, eine in D stetige Funktion $M(x,y) \neq 0$ zu finden, sodass die Gleichung

$$(M(x,y)g(x,y))\,dx + (M(x,y)h(x,y))\,dy = 0$$

exakt ist. M wird der **Eulersche Multiplikator** genannt.
Es muss (3.14) genügen, d.h. dass

$$(M\ g)_y = (M\ h)_x$$

also

$$M_y\ g + M\ g_y = M_x\ h + M\ h_x$$

sein muss (Diese ist eine PDE!).
Man kann ein M bestimmen, welches nur von x oder y abhängt. Der Ansatz

$$\begin{array}{lll} M = M(x) & \text{führt auf} & \dfrac{g_y - h_x}{h} = \dfrac{M'}{M} = (\lg M)'_x \\ M = M(y) & \text{führt auf} & \dfrac{h_x - g_y}{g} = \dfrac{M'}{M} = (\lg M)'_y \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} y\ dx + 2x\ dy &= 0 \text{ ist nicht exakt.} \\ \text{angenommen } M = M(y)\text{, dann} & \\ \frac{h_x - g_y}{g} = \frac{2-1}{y} &= \frac{1}{y} = (\lg M)'_y \\ \text{also}\quad M = y \quad \text{und} & \\ y^2\ dx + 2xy\ dy &= 0 \text{ ist exakt.} \end{aligned}$$

Beide Ansätze können erfolgreich sein.

Kapitel 4

Existenz und Eindeutigkeit

4.1 Satz von PEANO

Der Satz von Peano (Giuseppe PEANO, 1858-1932) lautet:

Die Funktion $f(x, y)$ sei stetig auf dem kompakten Rechteck

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b;\ (a, b > 0)\}$$

und es sei

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|, \quad \alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Dann gibt es **mindestens** eine auf $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ existierende Lösung des AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Beweis:

Wir verwandeln das AWP in ein Fixpunktproblem: Sei $y(x)$ eine Lösung von $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$, und $x \in J \subset [x_0 - a, x_0 + a],\ (x_0 \in J)$. Dann, können wir folgende schreiben

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ dt, \quad x \in J$$

wobei f ist stetig, so dass $y(x)$ differenzierbar ist. Im Folgenden sei

$J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$
$C(J)$ die Menge der auf J stetigen Funktionen
$K = \{y \in C(J) : |y(x) - y_0| \leq b$ für alle $x \in J\}$. $(K \neq \emptyset)$

Jedem $y \in K$ ordnen wir $Ay \in C(J)$ zu:

$$(Ay)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ dt, \quad \forall x \in J$$

Wir haben also

$$|(Ay)(x) - y_0| \leq |x - x_0| \cdot M \leq \alpha M \leq b \qquad \forall x \in J$$

das heißt Ay gehört zu K und A bildet K in K ab. Somit haben wir:

Eine Funktion $y \in K$ löst genau dann (auf J) **das AWP, wenn sie ein Fixpunkt der Abbildung $A : K \to K$ ist, d.h. genau dann, wenn $Ay = y$.**

Der Satz von Peano ist also bewiesen, sobald wir die Existenz eines Fixpunktes von A verifizieren können. Dafür setzen wir folgende nächste Schritte ein:

- $C(J)$ machen wir vermöge der Maximumsnorm

  $$||y||_\infty = \max_{x \in J} |y(x)|$$

  zu einem Banachraum.

- $K \subset C(J)$ ist eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge dieses Raumes.

- Wir zeigen dass A stetig ist.
  Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf R können wir $\delta > 0$ so bestimmen, dass gilt

  $$|f(x, y) - f(x, z)| < \frac{\varepsilon}{\alpha} \quad \text{für } |y - z| < \delta$$

  Sind nun $y, z \in K$ mit

  $$||y - z||_\infty < \delta \quad \text{also } |y(x) - z(x)| < \delta \quad \forall x \in J$$

  so bleibt

  $$|f(x, y(x)) - f(x, z(x))| < \frac{\varepsilon}{\alpha} \quad \forall x \in J$$

  und somit haben wir:

  $$|(Ay)(x) - (Az)(x)| \leq |x - x_0| \frac{\varepsilon}{\alpha} \leq \alpha \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon \quad \forall x \in J$$

  also auch $||Ay - Az||_\infty < \varepsilon \quad \Rightarrow$. Daraus folgt die Stetigkeit von A.

- Jetzt zeigen wir dass die Bildmenge $A(K)$ von A relativ kompakt ist.
  Sei $y \in K$. Dann ist

  1. $|(Ay)(x)| \leq |y_0| + \alpha M \quad \forall x \in J$
  2. $|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \cdot M \quad \forall x_1, x_2 \in J$

  Diese Resultate: Die Funktionenfamilie $A(K)$ ist also 1.) punktweise beschränkt und 2.) gleichgradig stetig auf J; lassen uns den **Satz von ARZELÀ-ASCOLI** verwenden: Enthält daher jede Folge aus $A(K)$ eine auf J gleichmäßig konvergente Teilfolge, und da diese auch im Sinne der $|| \cdot ||_\infty$ konvergiert, ist $A(K)$ relativ kompakt.

Mit Hilfe des zweiten **SCHAUDER'schen Fixpunktsatzes** (Satz 230.4, Heuser II) ist die Existenz eines Fixpunktes von A dann sichergestellt.

Folgende Sätze haben wir gebraucht: Satz von ARZELÀ-ASCOLI
und Satz von SCHAUDER.

Satz von ARZELÀ-ASCOLI

Jede in $J = [a, b]$ gleichgradig stetige Folge von Funktionen

$$y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), ..$$

mit $|y_n(x)| \leq c$ für $x \in J,\ \ n \geq 1$, enthält eine in J gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Kompaktheit

Eine Teilmenge K eines normierten linearen Raumes B heißt **kompakt**, wenn jede Folge (y_n) aus K eine konvergente Teilfolge mit Limes in K besitzt.
Die Menge $K \subset B$ heißt **relativ kompakt**, wenn $\overline{K}$ kompakt ist.
Ein Operator $A:\ K \to B$ mit $K \subset B$ heißt **kompakt** in K, wenn $A(K)$ relativ kompakt ist.

Fixpunktsatz von SCHAUDER

Es sei K eine abgeschlossene und konvexe Menge eines Banachraumes B (z.B. $C(J)$) und $A:\ K \to B$ ein in K stetiger und kompakter Operator mit $A(K) \subset K$. Dann besitzt A in K mindestens einen Fixpunkt.

4.2 Fixpunktsatz von WEISSINGER

Als Vorbereitun für den Beweis von Picard-Lindelöf Satz über die Eindeutigkeit der Lösung eines AWPs, diskutieren wir jetzt den **Fixpunktsatz von Weissinger**:

Sei $U \neq \emptyset,\ U$ abgeschlossene Teilmenge von B, B Banachraum mit Norm $||\cdot||$, ferner $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ eine konvergente Reihe $(\alpha_n > 0)$ und $A:\ U \to U$ eine Selbstabbildung von U mit

$$||A^n u - A^n v|| \leq \alpha_n ||u - v|| \quad \forall u, v \in U,\ n \in \mathbb{N},$$

dann besitzt A genau einen Fixpunkt $(Au = u)$.
Dieser Fixpunkt ist Grenzwert der Iterationsfolge $(A^n u_0)$ bei beliebigem Startelement $u_0 \in U$ also $u_0 \in U\ u_n = A\ u_{n-1}$).

Beweis: Wir haben dass

$$||u_{n+1} - u_n|| = ||A^n u_1 - A^n u_0|| \leq \alpha_n ||u_1 - u_0||$$

dann

$$\begin{aligned}||u_{n+k} - u_n|| &\leq ||u_{n+k} - u_{n+k-1}|| + ||u_{n+k-1} - u_{n+k-2}|| + +||u_{n+1} - u_n|| \\ &\leq \underbrace{(\alpha_{n+k-1} + \alpha_{n+k-2} + ... + \alpha_n)}_{\to 0 \text{ für } n,k\to\infty} ||u_1 - u_0|| \end{aligned} \tag{4.1}$$

das heißt (u_n) ist eine Cauchy-Folge.
Somit gibt es einen Grezwert u in dem vollständigen Raum B. Da alle $u_n \in U$, und U abgeschlossen ist, ist $u \in U$.
Dieses u ist der gesuchte Fixpunkt.

$$||u_{n+1} - Au|| = ||Au_n - Au|| \leq \alpha_1 \; ||u_n - u|| \longrightarrow 0 \qquad n \to \infty$$

strebt (u_n) gegen u und gegen Au und somit haben wir

$$Au = u.$$

Wäre $v \in U$ noch ein Fixpunkt von A, so hätten wir

$$||u - v|| = ||A^n u - A^n v|| \leq \alpha_n \; ||u - v|| \longrightarrow 0 \qquad n \to \infty$$

Daraus folgt, dass $u = v$ **(Eindeutigkeit)**.
Fehlerabschätzung: von (4.1) mit $k \to \infty$ folgt dass

$$||u - u_n|| \leq \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu \right) ||u_1 - u_0||.$$

4.3 Satz von PICARD-LINDELÖF

Die Funktion $f(x, y)$ sei stetig auf dem kompakten Rechteck

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, \;\; |y - y_0| \leq b\} \qquad (a, b > 0)$$

und habe dort eine stetige Ableitung nach y oder etwas schwächer: Sie genüge einer „Lipschitzbedingung“ bezüglich y, d.h. es gebe eine positive „Lipschitz-Konstante“ L mit

$$|f(x, y) - f(x, \overline{y})| \leq L|y - \overline{y}| \tag{4.2}$$

für alle $(x, y), (x, \overline{y})$ aus R.
Dann besitzt das AWP $y' = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0$ genau eine Lösung $y(x)$ auf $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
Hierbei ist

$$\alpha = \min \left(a, \frac{b}{M} \right) \;\; \text{mit } M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|.$$

Die Lösung $y(x)$ kann iterativ gewonnen werden. Geht man nämlich von irgendeiner Funktion

$$z_0 \in K = \{y \in C(J) : |y(x) - y_0| \leq b \quad \forall x \in J\}$$

aus, und setzt

$$z_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z_{n-1}(t))\ dt \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, x \in J$$

so strebt $z_n(x) \to y(x)$, und zwar gleichmäßig auf J. Für die „sukzessiven Approximationen“ z_n gilt auf J die Fehlerabschätzung

$$|y(x) - z_n(x)| \leq \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(\alpha L)^\nu}{\nu!} \right) \max_{x \in J} |z_1(x) - z_0(x)|$$

Beweis:

Wir bedienen uns dazu des Weissinger'schen Fixpunktsatzes mit $U = K$ und $B = C(J)$, ausgerüstet mit Maximumsnorm. Hier ist A der Operator

$$(Ay)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ dt.$$

Induktiv via Lipschitzbedingung zeigt man, dass

$$|(A^n u)(x) - (A^n v)(x)| \leq \frac{|x - x_0|^n}{n!} L^n ||u - v||_\infty \quad (n \in \mathbb{N}, x \in J) \tag{4.3}$$

(i) für n=1 folgt von (4.2), dass

$$|(Au)(x) - (Av)(x)| \leq L \cdot |x - x_0|\ ||u - v||_\infty$$

(ii) sei (4.3) für $n-1$ geltend:

$$|(A^{n-1}u)(x) - A^{n-1}v)(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} L^{n-1} ||u - v||_\infty$$

Dann

$$\begin{aligned} |(A^n u)(x) - A^n v)(x)| &= |(A\underbrace{(A^{n-1}u)}_{y_1})(x) - (A\underbrace{(A^{n-1}v)}_{y_2})(x)| \\ \leq \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\ dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\ dt \right| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} L|y_1(t) - y_2(t)|\ dt \right| \\ &= \int_{x_0}^{x} L|(A^{n-1}u)(t) - (A^{n-1}v)(t)|\ dt \\ \leq \int_{x_0}^{x} \frac{|t - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} L^n ||u - v||_\infty\ dt &= \frac{|x - x_0|^n}{n!} L^n ||u - v||_\infty \end{aligned}$$

Somit ist (4.3) bewiesen. Daraus folgt:

$$\|A^n u - A^n v\|_\infty \leq \frac{(\alpha L)^n}{n!} ||u - v||_\infty$$

Den ganzen Rest besorgt der Weissinger'sche Fixpunktsatz mit $\alpha_\nu = \dfrac{(\alpha L)^\nu}{\nu!}$. Folgende

Fehlerabschätzung gilt

$$|y(x) - z_n(x)| \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(\alpha L)^\nu}{\nu!} \cdot \|z_1 - z_0\|_\infty.$$

Bemerkung 1: Hat $f(x, y)$ eine stetige Ableitung nach y: Da R kompakt ist, folgt (Weierstrass) die Existenz von $L > 0$ so, dass

$$|f_y(x, y)| \leq L$$

und so ist auch

$$|f(x, y) - f(x, \overline{y})| \leq L|y - \overline{y}|, \qquad (x, y),\, (x, \overline{y}) \in R.$$

Bemerkung 2: Wir brauchen keine Differenzierbarkeit nach x.

Beispiel zum PICARD-LINDELÖF-Iterationsverfahren:

$$z_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z_{n-1}(t))\; dt \qquad z_0 \in K.$$

Sei $f(x, y) = y$, $y' = y$, $y(0) = 1 = y_0$: Dieses AWP ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
y(x) &= 1 + \int_0^x y(t)\; dt \\
\text{Sei } z_0(x) &= 1 \\
z_1(x) &= 1 + \int_0^x 1\; dt = 1 + x \\
z_2(x) &= 1 + \int_0^x (1 + t)\; dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \\
\text{usw.} & \\
z_n(x) &= 1 + \int_0^x z_{n-1}(t)\; dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

Da $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ...$ sieht man, dass $z_n(x)$ gegen e^x konvergiert: Die Lösung des AWP.

Kapitel 5

Systeme von Differentialgleichungen

Seien $f_1(x, y_1, ...y_n), f_2(x, y_1, ...y_n), ..., f_n(x, y_1, ...y_n)$ n Funktionen definiert auf $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $(x, y_1, ...y_n) \in D$. Sie bilden die rechte Seite eines Differentialgleichungs-Systems:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, ...y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, ...y_n) \\ .. &= .... \\ .. &= .... \\ y_n' &= f_n(x, y_1, ...y_n). \end{aligned}$$

Die Funktionen $(y_1(x), ..., y_n(x))$ bilden eine Lösung in einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$, wenn sie differenzierbar sind und diese Gleichungen identisch genügen.
Wir machen im folgenden von der Vektorschreibweise Gebrauch:

$$\underline{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \qquad \underline{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, ...y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, ...y_n) \end{pmatrix}$$

So bedeutet für $\underline{y}(x)$ stetig differenzierbar, dass jede Komponente $y_i(x)$ stetig differenzierbar ist. Ebenso sind Ableitung und Integral definiert:

$$\underline{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} \qquad \int_a^b \underline{y}(x)\ dx = \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(x)\ dx \\ \vdots \\ \int_a^b y_n(x)\ dx \end{pmatrix}$$

Mit dieser Bezeichnung lautet das System

$$\underline{y}'(x) = \underline{f}(x, \underline{y}(x)).$$

Wir werden die Euklidische Norm verwenden:

$$|\underline{v}| = \sqrt{|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2}$$

5.0.1 Existenzsatz

Ist $\underline{f}(x,\underline{y})$ in dem Gebiet D stetig und $(x_0,\underline{y}_0) \in D$, so besitzt das AWP

$$\underline{y}' = \underline{f}(x,\underline{y}), \quad \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0,$$

mindestens eine Lösung.

5.0.2 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Die Funktion $\underline{f}(x,\underline{y})$ sei in dem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und genüge in D einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich $\underline{y}$. Dann besitzt das AWP

$$\underline{y}' = \underline{f}(x,\underline{y}) \quad \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0$$

wenn $(x_0,\underline{y}_0) \in D$ ist, genau eine Lösung.

5.0.3 Existenzsatz im Komplexen

Die von $n+1$ komplexen Variablen $(z,w_1,\ldots,w_n) \in D \subset \mathbb{C}^{n+1}$ abhängige Vektorfunktion $\underline{f}(z,\underline{w})$ mit Werten in $\mathbb{C}^n$ sei in D holomorph (d.h. Jede Komponente sei nach allen $n+1$ komplexen Variablen stetig differenzierbar) und es sei $(z_0,\underline{w}_0) \in D$. Dann besitzt das AWP

$$\underline{w}' = f(z,\underline{w}) \quad \underline{w}(z_0) = \underline{w}_0$$

in einem Kreis $|z-z_0| < \alpha,\ \alpha > 0$ genau eine holomorphe Lösung $\underline{w}(z)$.

5.1 Lineares System von n Differentialgleichungen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
y_1' & = & a_{11}(x)y_1 & + & a_{12}(x)y_2 & +\cdots+ & a_{1n}(x)y_n & + & f_1(x) \\
y_2' & = & a_{21}(x)y_1 & + & a_{22}(x)y_2 & +\cdots+ & a_{2n}(x)y_n & + & f_2(x) \\
\vdots & = & \vdots & + & \cdots & +\cdots+ & \cdots & + & \vdots \\
y_n' & = & a_{n1}(x)y_1 & + & a_{n2}(x)y_2 & +\cdots+ & a_{nn}(x)y_n & + & f_n(x)
\end{array}$$

oder in der Matrizenschreibweise

$$\underline{y}' = A(x)\ \underline{y} + \underline{f}(x)$$

5.1.1 Existenz-, Eindeutigkeits- und Abschätzungssatz

Die Funktionen $A(x), \underline{f}(x)$ seien stetig in einem Intervall J, und es sei $x_0 \in J$. Dann hat das AWP

$$\underline{y}' = A(x)\underline{y} + \underline{f}(x), \quad \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0$$

genau eine Lösung $\underline{y}(x)$. Sie existiert in ganz J. Ist I ein Teilintervall von J, $x_0 \in I$ und

$$|A(x)| \leq L \quad \text{und} \quad \left|\underline{f}(x)\right| \leq \delta \quad x \in I, \ \left|\underline{y}_0\right| \leq \gamma$$

so besteht die Abschätzung

$$|\underline{y}(x)| \leq \gamma e^{L|x-x_0|} + \frac{\delta}{L}\left(e^{L|x-x_0|} - 1\right) \quad \text{in } I.$$

Wir werden verträgliche Normen verwenden. Es sei $|A|$ eine Norm in $\mathbb{R}^{n \times n}$ und $|\underline{y}|$ eine Norm in $\mathbb{R}^n$. Verträgliche Normen sind die dass

$$|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B| \tag{5.1}$$

$$|A \cdot \underline{y}| \leq |A| \cdot |\underline{y}| \tag{5.2}$$

Beispiel 1: $|A| = \sum_{ij}^n |a_{ij}|$ $\qquad |\underline{y}| = \max_i |y_i|$.

Beispiel 2: $|A| = \sqrt{\sum_{ij}^n |a_{ij}|^2}$ $\qquad |\underline{y}| = \sqrt{\sum_i |y_i|^2}$.

Beispiel 3: $|A| = \max_m \frac{1}{c_m} \sum_{k=1}^n c_k |a_{km}|$ $\qquad |\underline{y}| = \sum_{k=1}^n c_k |y_k|$.
$c_k > 0, \ k = 1, 2, \ldots, n$

5.2 Homogene lineare Systeme

$$\underline{y}' = A(x)\underline{y}$$

Ist $A(x)$ in J reellwertig und stetig, so bilden die reellen Lösungen $\underline{y}(x)$ der homogenen Gleichung einen n-dimensionalen reellen linearen Raum.

Folgerungen:

(a) Eine Linearkombination von Lösungen

$$\underline{y}(x) = c_1\underline{y}_1(x) + c_2\underline{y}_2(x) + \ldots + c_k\underline{y}_k(x)$$

stellt wieder eine Lösung dar.

(b) Ist $\underline{y}(x)$ eine Lösung und $\underline{y}(x_0) = 0, \ x_0 \in J$, so ist $\underline{y}(x) \equiv 0$ in J.

(c) Man nennt k Lösungen $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_k$ **linear abhängig**, wenn Konstanten $c_1, \ldots, c_k$ mit $|c_1| + \ldots + |c_k| > 0$ existieren, sodass

$$c_1\underline{y}_1(x) + c_2\underline{y}(2(x) + \ldots + c_k\underline{y}_k(x) = \underline{0}.$$

Andernfalls werden sie **linear unabhängig** genannt:

$$c_1\underline{y}_1(x) + c_2\underline{y}(2(x) + \ldots + c_k\underline{y}_k(x) = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

(d) Für $k > n$ sind k Lösungen linear abhängig.

(e) Ein System von n linear unabhängigen Lösungen $\{\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n\}$ wird **Hauptsystem** oder Fundamentalsystem genannt. So lässt sich jede Lösung $\underline{y}$ als eindeutige Linearkombination

$$\underline{y} = c_1\underline{y}_1 + \ldots + c_n\underline{y}_n$$

darstellen.

Eine Lösungsmatrix ist definiert durch

$$Y(x) = \Big(\underline{y}_1(x), \underline{y}_2(x), \ldots, \underline{y}_n(x)\Big)$$

so haben wir

$$Y'(x) = A(x)\ Y(x)$$

Ist $Y(x)$ ein Hauptsystem, so erhält man sämtliche Lösungen in der Form

$$\underline{y} = Y \cdot \underline{c} \qquad \text{wobei} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & y_1 & + & 3y_2 \\ y_2' & = & 5y_1 & + & 3y_2 \end{array}$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hauptsystem von Lösungen:

$$\underline{y}_1(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} \qquad \underline{y}_2(x) = \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich sind diese zwei Lösungen linear unabhängig: setzen wir

$$\underline{0} = c_1\underline{y}_1 + c_2\underline{y}_2 = \begin{pmatrix} c_1e^{-2x} + 3c_2e^{6x} \\ -c_1e^{-2x} + 5c_2e^{6x} \end{pmatrix}$$

für $x = 0$ ist

$$\begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ -c_1 + 5c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0,\ c_2 = 0$$

also lineare Unabhängigkeit.
Nehmen wir Beispiel 1 von früher: $|A| = \sum_{ij}^n |a_{ij}|$, so ist

$$|A(x)| = 12 = L \quad \text{und für} \quad y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |y_0| = 2 = \gamma$$

so besteht die Abschätzung

$$|\underline{y}(x)| \leq 2 \cdot e^{12|x|}.$$

5.3 Die Wronski-Determinante

Ist $Y(x) = (\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n)$ eine Lösungsmatrix, so nennt man ihre Determinante

$$\phi(x) = \det Y(x)$$

die **Wronski-Determinante** des Lösungssystems.

Satz:

Die **Wronski-Determinante** eines Lösungssystems $\phi(x)$ genügt, wenn $A(x)$ in J stetig ist, der Differentialgleichung

$$\phi' = (\mathrm{sp}A(x))\phi \quad \text{in } J,$$

wobei

$$\mathrm{sp}\ A(x) = a_{11}(x) + a_{22}(x) + \ldots + a_{nn}(x)$$

die Spur von A ist.

Folgerung:

Die **Wronski-Determinante** ist entweder identisch Null oder überall nicht Null.
Die n Lösungen $(\underline{y}_i(x))$ bilden genau dann ein Hauptsystem, wenn $\phi = \det Y \neq 0$ ist.
Das Nichtverschwinden der Wronski-Determinante ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass ein Hauptsystem vorliegt.

Beispiel:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{sp}\ A(x) = 1 + 3 = 4 \qquad \phi' = 4\ \phi$$

Man setzt $x_0 = 0$:

$$\underline{y}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{y}_2(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \phi(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = 8$$

$$\phi(x) = \phi(0)\ e^{4x} = 8\ e^{4x} \qquad \det Y(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & 3e^{6x} \\ -e^{-2x} & 5e^{6x} \end{pmatrix} = 5e^{4x} + 3e^{4x} = 8e^{4x}$$

Es ist im Allgemeinen nicht möglich, die Lösungen eines homogenen Systems in geschlossener Form anzugeben.

5.4 Das Reduktionsverfahren von d'Alembert

Wenn eine Lösung bekannt ist, lässt sich das System n-ter Ordnung auf ein System von $(n-1)$ Differentialgleichungen zurückführen. Ist $\underline{y}_b(x)$ eine bekannte Lösung von $\underline{y}' = A(x)\underline{y}$, so macht man für die weiteren Lösungen den Ansatz

$$\underline{y}(x) = \psi(x) \cdot \underline{y}_b(x) + \underline{z}(x) \quad \text{mit} \quad z(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Dann ist $\underline{y}(x)$ eine weitere Lösung, wenn

$$\underline{z}' = A\underline{z} - \psi'\underline{y}_b$$

Für die erste Komponente bedeutet das:

$$\sum_{j=2}^{n} a_{ij} z_j = \psi' y_{b1} \qquad (i = 1)$$

Für die i-te Komponente $(2 \leq i \leq n)$

$$z_i' = \sum_{j=2}^{n} a_{ij} z_j - \psi' y_{bi} \quad \longrightarrow \quad \text{Substitution von } \psi'$$

$$\Rightarrow \quad z_i' = \sum_{j=2}^{n} \left(a_{ij} - \frac{y_{bi}}{y_{b1}} a_{1j} \right) z_j \quad i = 2, \ldots, n \tag{5.3}$$

also ein homogenes lineares System $(n-1)$-ter Ordnung unter der Voraussetzung $y_{b1} \neq 0$ oder aber $y_b(x) \neq 0$. Ist $(0, z_2, \ldots, z_n)$ bekannt, so ergibt sich ψ aus (5.3):

$$\psi(x) = \int \frac{1}{y_{b1}} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j} z_j \right) dx$$

Beispiel:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} y_1' & = & \frac{1}{x} y_1 & - & y_2 \\ y_2' & = & \frac{1}{x^2} y_1 & + & \frac{2}{x} y_2 \end{array} \right. \qquad \text{also } A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix}$$

hat die Lösung $\underline{y}_b(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}$.

Wir setzen $z(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix}$ und $y(x) = \psi(x) y_b(x) + z(x)$

Daraus folgt

$$\underline{z}' = A\underline{z} - \psi'\underline{y}_b; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ z_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(x) \end{pmatrix} - \psi' \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_2 - \psi' x^2 \\ \frac{2}{x} z_2 + \psi' x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_2 - \psi' x^2 \\ \frac{2}{x} z_2 + \psi' x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \psi' = -\frac{z_2}{x^2} \\ z_2' = \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{x^2}\right) z_2 \end{array}$$

$$z_2' = \frac{1}{x} z_2 \quad \Rightarrow \quad \text{(eine Lösung)} \quad z_2(x) = x \quad \text{und}$$

$$\psi(x) = -\int \frac{z_2}{x^2}\, dx = -\int \frac{x}{x^2}\, dx = -\lg x$$

und eine weitere Lösung des Systems ist

$$y(x) = \psi(x)\, \underline{y}_b(x) + \underline{z}(x) = -\lg x \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \lg x \\ x \lg x + x \end{pmatrix}.$$

$(\underline{y}_b, \underline{y})$ ist ein Hauptsystem.

5.5 Inhomogene Systeme

Jetzt betrachten wir den allgemeinen Fall

$$\underline{y}' = A(x)\underline{y} + \underline{f}(x)$$

SATZ:

Man erhält sämtliche Lösungen $\underline{y}(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung in der Form

$$\underline{y} = \underline{y}_h + \underline{y}_p$$

wobei $\underline{y}_p$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{f}$ ist und $\underline{y}_h$ alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung durchläuft.

5.5.1 Methode der Variation der Konstanten

Ist $Y(x)$ ein Hauptsystem (Lösungsmatrix) von Lösungen der homogenen Differentialgleichung, so gilt

$$\underline{y}_h(x) = Y(x)\,\underline{c}$$

Die Konstanten $(c_1, c_2, ..., c_n)$ werden nun durch Funktionen von x ersetzt und man sucht eine Lösung in der Form

$$\underline{y}_p(x) = Y(x).\underline{c}(x) \qquad \text{wobei} \quad \underline{c}(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{pmatrix}$$

Nach der Substitution hat man dann

$$Y(x) \cdot \underline{c}'(x) = \underline{f}(x).$$

Da Y ein Hauptsystem ist, ist die Wronski-Determinante $\det Y \neq 0$, also existiert $Y^{-1}(x)$, und sie ist in J stetig. Daraus folgt

$$\underline{c}(x) = \int Y^{-1}(t) \cdot \underline{f}(t)\ dt$$

und

$$\underline{y}_p(x) = \int Y(x) Y^{-1}(t) \cdot \underline{f}(t)\ dt$$

SATZ:

Das AWP

$$\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{f} \qquad \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0$$

hat eine eindeutige Lösung $\underline{y}(x) = Y(x) \cdot \underline{c} + \underline{y}_p$, genauer

$$\underline{y}(x) = Y(x) \cdot Y^{-1}(x_0) \cdot \underline{y}_0 + Y(x) \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t) \cdot \underline{f}(t)\ dt$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & \frac{1}{x} y_1 & - & y_2 & + & x \\ y_2' & = & \frac{1}{x^2} y_1 & + & \frac{2}{x} y_2 & - & x^2 \end{array} \qquad \underline{f}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

und zusätzlich sei noch $x_0 = 1$ und $y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

$$Y(x) = \begin{pmatrix} x^2 & -x^2 \lg x \\ -x & x \lg x + x \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ also

$$\begin{aligned} Y^{-1}(x) &= \frac{1}{x^3} \cdot \begin{pmatrix} x(1+\lg x) & x^2 \lg x \\ x & x^2 \end{pmatrix} \\ Y^{-1}(x) \cdot \underline{f}(x) &= \frac{1}{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \lg x - x^2 \lg x \\ 1 - x^2 \end{pmatrix} \\ \int_1^x Y^{-1}(t) \cdot \underline{f}(t)\ dt &= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} x^2 - 1 + (4 - 2x^2 + 2\lg x) \lg x \\ 4 \lg x - 2x^2 + 2 \end{pmatrix} \\ \underline{y}_p(x) = \int_1^x Y(x) Y^{-1}(t) \cdot \underline{f}(t)\ dt &= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} x^2(x^2 - 1 + 2\lg x - 2\lg^2 x) \\ x(3 - 3x^2 + 2\lg x + 2\lg^2 x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie bei skalaren Differentialgleichungen, im Fall von konstanten Koeffizienten und wenn $\underline{f}$ bestimmten Funktionklassen gehört, können wir die Methode der unbestimmten Koeffizienten verwenden um eine particuläre Lösung zu finden.

Kapitel 6

Systeme mit konstanten Koeffizienten

In dem homogenen linearen System $\underline{y}' = A\underline{y}$ sei $A = (a_{ij})$ eine konstante Matrix.

6.1 Exponentialansatz von EULER

Man erhält alle Lösungen aus dem Ansatz

$$\underline{y}(x) = \underline{c} \cdot e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda x} \\ c_2 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda x} \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichung lautet dann

$$\underline{y}'(x) = \lambda \cdot \underline{c} \cdot e^{\lambda x} = A \cdot \underline{c} \cdot e^{\lambda x}$$

Das heißt also $\underline{y}(x)$ ist genau dann eine Lösung, wenn $(\lambda, \underline{c})$ die Gleichung

$$A\ \underline{c} = \lambda\ \underline{c} \tag{6.1}$$

genügt.
Ein Vektor $\underline{c} \neq \underline{0}$, welcher der Gleichung (6.1) genügt, wird **Eigenvektor** genannt. Die Zahl λ heißt der zu $\underline{c}$ gehörige **Eigenwert** der Matrix A.
Die Gleichung (6.1) (oder $(A - \lambda I)\underline{c} = \underline{0}$) ist ein lineares homogenes Gleichungssystem für $\underline{c}$. Es hat eine nichttriviale ($\underline{c} \neq 0$) Lösung, wenn

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms** $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. $P_n(\lambda)$ besitzt n reelle oder komplexe Nullstellen, wobei jede Nullstelle entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt wird. Den zu λ gehörenden Eigenvektor $\underline{c}$ erhält man durch Lösen des Systems $(A - \lambda I)\underline{c} = 0$; $\underline{c}$ ist nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt.

Wir konzentrieren uns auf reelle Systeme und wir suchen reelle Lösungen.

Bei reellem A genügen mit λ und $\underline{c}$ auch die konjugiert komplexen Größen $\overline{\lambda}$ und $\overline{\underline{c}}$ der Gleichung (6.1). In diesem Fall führt die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil auf dieselben zwei reellen Lösungen. Ist $\lambda = \mu + i\nu$ ein komplexer Eigenwert und $\underline{c} = \underline{a} + i\underline{b}$ ein zugehöriger Eigenvektor der Matrix A, so ergeben sich aus der komplexen Lösung $\underline{y} = \underline{c}e^{\lambda x}$ zwei reelle Lösungen:

$$\underline{z}_1 = e^{\mu x}\{\underline{a}\cos\nu x - \underline{b}\sin\nu x\} \qquad \text{sowie} \qquad \underline{z}_2 = e^{\mu x}\{\underline{a}\sin\nu x + \underline{b}\cos\nu x\}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' &=& y_1 &-& 2y_2 && \\ y_2' &=& 2y_1 &&&-& y_3 \\ y_3' &=& 4y_1 &-& 2y_2 &-& y_3 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Es ist

$$P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 + \lambda + 2)$$

Daraus ergeben sich die **Eigenwerte**: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$ und $\lambda_3 = 1$. Um die Eigenvektoren zu bestimmen, lösen wir

$$\text{Eigenvektor } \underline{c}_1: \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} & -2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} & -1 \\ 4 & -2 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{c}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\underline{c}_2 = \overline{\underline{c}_1}$ und $\underline{c}_3 = (1, 0, 2)^T$.

So haben wir

$$\underline{z}_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x \right]$$

$$\underline{z}_2 = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x \right]$$

$$\underline{z}_3 = e^{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6.2 Lineare Transformation

Ist C eine nicht-singuläre konstante Matrix, so gehen durch die Abbildung

$$\underline{y} = C\underline{z} \quad \Rightarrow \quad \underline{z} = C^{-1}\underline{y}$$

die Lösungen von $\underline{y}' = A\underline{y}$ über in die Lösungen $\underline{z}(x)$ von

$$\underline{z}' = B\underline{z} \quad \text{mit} \quad \underline{B} = C^{-1} \cdot A \cdot C \tag{6.2}$$

und umgekehrt.

Besitzt A n linear unabhängige Eigenvektoren $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$ und setzt man $C = (\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n)$, so ist

$$AC = (\lambda_1\underline{c}_1, \lambda_2\underline{c}_2, \ldots, \lambda_n\underline{c}_n) \qquad \text{und} \qquad C^{-1}AC = B \qquad \text{mit}$$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

so ist (6.2) in der Form

$$\begin{matrix} z_1' = \lambda_1 z_1 \\ z_2' = \lambda_2 z_2 \\ \vdots \\ z_n' = \lambda_n z_n \end{matrix} \qquad \text{mit Lösungen} \qquad \begin{matrix} z_1 = e^{\lambda_1 x} \\ z_2 = e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ z_n = e^{\lambda_n x} \end{matrix}$$

und so ist

$$Y(x) = C\ Z = (\underline{c}_1 e^{\lambda_1 x}, \underline{c}_2 e^{\lambda_2 x}, \ldots, \underline{c}_n e^{\lambda_n x}).$$

Dies im Falle von n linear unabhängigen Eigenvektoren!
Im allgemeinen Fall existiert zu jeder Matrix A eine nichtsinguläre Matrix C, sodass

$$B = C^{-1}AC, \qquad B = \begin{pmatrix} [J_1] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [J_2] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & [J_k] \end{pmatrix} \quad \textbf{JORDANsche Normalform}$$

$$\text{mit } [J_i] \ldots \textbf{Jordan-Kasten:} \qquad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \qquad r_i \times r_i - \text{Matrix}$$

mit $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$.

Wir haben $P_n(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$.

Beispiel:

$$B = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} & & 0 \\ & \begin{bmatrix} \mu \end{bmatrix} & \\ 0 & & \begin{bmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Die Lösung von $\underline{z}' = B\underline{z}$ sind

$$z(x) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & \frac{1}{2}x^2 e^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ 0 & 0 & e^{\lambda x} \end{bmatrix} & & 0 \\ & \begin{bmatrix} e^{\mu x} \end{bmatrix} & \\ 0 & & \begin{bmatrix} e^{\nu x} & xe^{\nu x} \\ 0 & e^{\nu x} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: $\underline{y} = C\underline{z}$, das heißt: $\underline{y} = \underline{P}_m(x)e^{\lambda x}$.

Also: Zu einer k-fachen Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms gibt es k linear unabhängige Lösungen

$$\underline{y}_1 = \underline{P}_0(x)e^{\lambda x}, \dots, \underline{y}_k = \underline{P}_{k-1}(x)e^{\lambda x}$$

mit $\underline{P}_m(x) = (P_1^m(x), \dots, P_n^m(x))^T$, wobei $P_i^m(x)$ ein Polynom mit einem Grad $\leq m$ ist.

Falls, zu k-fachen Nullstelle λ, das Problem $(A - \lambda I)\,\underline{c} = 0$ k linearen unabhängige konstanten Eigenvektoren hat, dann sind $\underline{P}_m(x) = \underline{c}$ wie bei dem Fall $k = 1$ zu wählen.

Beispiel:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Aus $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$ folgt: $\lambda = -1$ und $r = 2$, sowie

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Dies hat nur eine linear unabhängige Lösung $\underline{c} = (1, 2)^T$, also ist

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x}$$

Eine zweite linear unabhängige Lösung ergibt sich aus dem Ansatz $\underline{y} = \underline{P}_1(x)e^{\lambda x}$, d.h.

$$\underline{y}_2 = \begin{pmatrix} a + bx \\ c + dx \end{pmatrix} e^{-x}$$

Es ergibt sich: $a = 0,\ b = 1,\ c = -1,\ d = 2$:

$$\underline{y}_2 = \begin{pmatrix} x \\ -1+2x \end{pmatrix} e^{-x}$$

Weitere k-fache Nullstellen

Für m linear unabhängige Lösungen

$$\begin{aligned}
\underline{y}_1(x) &= \underline{P}_0(x)e^{\lambda x} & \underline{y}_1(x) &= \underline{K}_1 e^{\lambda x}\\
\underline{y}_2(x) &= \underline{P}_1(x)e^{\lambda x} & \underline{y}_2(x) &= \underline{K}_2 e^{\lambda x} + \underline{K}_3 x e^{\lambda x}\\
&\vdots & &\vdots\\
\underline{y}_m(x) &= \underline{P}_{m-1}(x)e^{\lambda x} & \underline{y}_m(x) &= \underline{K}_l e^{\lambda x} + \underline{K}_{l+1} x e^{\lambda x} + \underline{K}_{l+2}\tfrac{x^2}{2!}e^{\lambda x} + \ldots + \underline{K}_{l+m-1}\tfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\underline{y}' = A\underline{y} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$$

$\det(A-\lambda I) = (\lambda+3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3$

$$(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 3+3 & -18 \\ 2 & -9+3 \end{pmatrix} \qquad (A-\lambda I)\underline{x} = 0 \qquad \begin{matrix} 6x_1 - 18x_2 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Damit haben wir: $\underline{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie $\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x}$. Jetzt setzen wir

$$\underline{y}_2 = \underline{K}_2 e^{\lambda x} + \underline{K}_3 x e^{\lambda x}$$

Dann muss folgende gelten

$$\begin{aligned}
(A-\lambda I)\underline{K}_3 &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{K}_3 = \underline{K}_1\\
(A-\lambda I)\underline{K}_2 &= \underline{K}_3
\end{aligned}$$

Wir berechnen $\underline{K}_2$:

$$\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} 6x_1 - 18x_2 = 3 \\ 2x_1 - 6x_2 = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow x_2 = \frac{2x_1 - 1}{6},\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 0$$

$$\underline{K}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x e^{-3x}$$

$$\underline{y} = c_1\underline{y}_1 + c_2\underline{y}_2$$

Formel für 2-fache Nullstelle λ:

$$(A-\lambda I)\underline{K}_1 = 0 \qquad \underline{y}_1 = \underline{K}_1 e^{\lambda x}$$
$$(A-\lambda I)\underline{K}_2 = \underline{K}_1 \qquad \text{d.h.:} \quad \underline{y}_2 = \underline{K}_2 e^{\lambda x} + \underline{K}_1 x e^{\lambda x}$$

Formel für 3-fache Nullstelle λ:

$$\underline{y}_1 = \underline{K} e^{\lambda x}$$
$$\underline{y}_2 = \underline{K} x e^{\lambda x} + \underline{P} e^{\lambda x}$$
$$\underline{y}_3 = \underline{K} \tfrac{x^2}{2} e^{\lambda x} + \underline{P} x e^{\lambda x} + \underline{Q} e^{\lambda x}$$

$$(A-\lambda I)\underline{K} = 0$$
$$(A-\lambda I)\underline{P} = \underline{K}$$
$$(A-\lambda I)\underline{Q} = \underline{P}$$

6.3 Die Eliminationsmethode bei kleinen Systemen

Durch Substitution eliminieren wir eine der unbekannten Funktionen. Hier wird der Operator $D = \frac{d}{dx}$ als Koeffizient betrachtet.

Beispiel 1: Sei $D = \frac{d}{dx}$

$$\begin{cases} y' - 2z = 0 \\ z' - 3y = 0 \end{cases} \qquad \text{man schreibt:} \qquad \begin{cases} Dy - 2z = 0 \\ Dz - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|r} \times D & D^2y - 2Dz = 0 \\ \times 2 & 2Dz - 6y = 0 \end{array} \qquad \text{Summe:} \qquad D^2y - 6y = 0$$

$$\begin{array}{r|r} \times 3 & 3Dy - 6z = 0 \\ \times D & D^2z - 3Dy = 0 \end{array} \qquad \text{Summe:} \qquad D^2z - 6z = 0$$

Lösung von $y'' - 6y = 0$ ist $y = c_1 e^{\sqrt{6}x} + c_2 e^{-\sqrt{6}x}$
Lösung von $z'' - 6z = 0$ ist $z = c_3 e^{\sqrt{6}x} + c_4 e^{-\sqrt{6}x}$

Es gibt nur **2** unabhängige Konstante. Um diese Konstanten zu bestimmen, setzt man die Lösungen in den ursprünglichen Gleichungen ein:

$$c_1\sqrt{6}e^{\sqrt{6}x} + c_2(-\sqrt{6})e^{-\sqrt{6}x} - 2c_3 e^{\sqrt{6}x} - 2c_4 e^{-\sqrt{6}x} = 0$$

$$\text{d.h.:} \quad (c_1\sqrt{6} - 2c_3)e^{\sqrt{6}x} - (c_2\sqrt{6} + 2c_4)e^{-\sqrt{6}x} = 0$$

$$\text{also:} \quad c_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1 \quad \text{und} \quad c_4 = -\frac{\sqrt{6}}{2}c_2$$

$$\text{So ist die Lösung des Systems:} \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} e^{\sqrt{6}x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{6}x}$$

Beispiel 2: Inhomogen

$$\begin{cases} y' - y - z = 4e^x \\ z' - 3z + y = -1 \end{cases} \quad \text{man schreibt:} \quad \begin{cases} (D-1)y - z = 4e^x \\ (D-3)z + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|r} \times -1 & -(D-1)y + z = -4e^x \\ \times(D-1) & (D-1)(D-3)z + (D-1)y = 1 \end{array} \quad \text{Summe:} \quad (D-1)(D-3)z + z = 1 - 4e^x$$

$$\Rightarrow \quad (D^2 - 4D + 3)z + z = 1 - 4e^x$$

Man findet: $(D-2)^2 z = 1 - 4e^x$ Lösung inhom.: $z = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{4} - 4e^x$
$(D-2)y = -1 - 8e^x$ Lösung inhom.: $y = c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x} - \frac{1}{4} - 8e^x$

Man substituiert im System nun zurück: $c_4 = c_2$ und $c_3 = c_1 - c_2$ und erhält somit:

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} x e^{2x} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - 8e^x \\ \frac{1}{4} - 4e^x \end{pmatrix}$$

Mit der Eliminationsmethode können wir folgenden Typus von Problem lösen:

$$P(D)y = g(x)$$

Falls es einen Operator $G(D)$ gibt, sodass

$$G(D)g(x) = 0,$$

also falls $G(D)$ g vernichtet, haben wir

$$G(D)P(D)y = G(D)g(x) = 0$$

d.h. dass wir eine homogene Differentialgleichung

$$G(D)P(D)y = 0$$

lösen müssen, deren Lösung $P(D)y = g(x)$ genügt (mit entsprechender Wahl der Koeffizienten).

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= 4x^2 \\ \text{äquivalent zu} \qquad (D+2)(D+1)y &= 4x^2 \end{aligned}$$

Wir haben: $D^3(4x^2) = 0$ also $D^3(D+2)(D+1)y = 0$

dessen Lösung ist

$$y = \underbrace{c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}}_{y''+3y'+2y=0} + \underbrace{c_3 + c_4 x + c_5 x}_{D^3 y_p = 0}$$

setzt man $y_p = c_3 + c_4 x + c_5 x^2$, dann

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = (2c_3 + 3c_4 + 2c_5) + (2c_4 + 6c_5)x + 2c_5 x^2 = 4x^2$$

Man findet

$$c_5 = 2 \quad c_4 = -6 \quad c_3 = 7 \quad \text{also} \quad y_p = 7 - 6x + 2x^2$$

Beispiel 2: Systeme mit konstanten Koeffizienten: Kompartimentmodelle

Viele Prozesse in der Natur lassen sich durch das folgende Modell darstellen:
Gegeben seien n (reale oder fiktive) Behälter $K_1, \ldots, K_n$. Jedes K_i enthalte zur Zeit x genau $y_i(x)$ Masseneinheiten. Durch Transport mögen Massenmengen von K_i nach K_j gelangen, sodass $y_j' = K_{ij} y_i$, mit K_{ij}...Übertragungsrate.
So führt also K_i in der Zeit von x bis $x + dx$ insgesamt

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} K_{ij} y_i(x)\ dx = K_{ii} y_i(x)\ dx \quad \text{mit} \quad K_{ii} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} K_{ij}$$

Fügen wir dem Kompartiment K_i noch von außen Masse mit der zeitlichen Rate $\delta_i(x)$ zu, so haben wir

$$y_i' = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} K_{ji} y_j - K_{ii} y_i + \delta_i \quad i = 1, \ldots, n$$

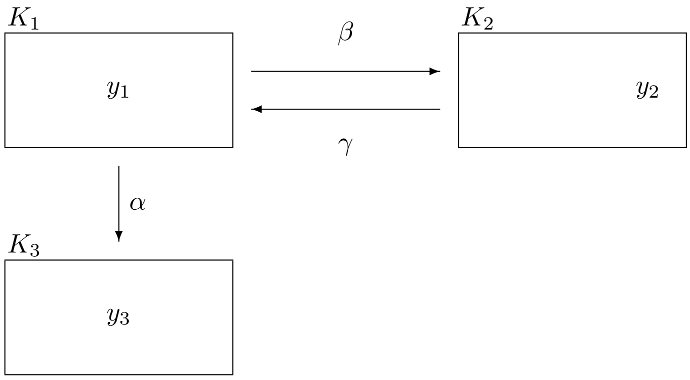
in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{11} & K_{21} & \cdots & K_{n1} \\ K_{12} & -K_{22} & \cdots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & \cdots & \cdots & -K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

Beispiel 3: Anwendung: Abbau eines Medikaments

Ein Medikament kommt aus der Blutbahn in das Gewebe, umgekehrt wieder aus dem Gewebe in die Blutbahn und wird dann erst ausgeschieden. Es sei dabei

$y_1(x)$ Einheiten des Medikamentes im Blut
$y_2(x)$ Einheiten des Medikamentes im Gewebe
$y_3(x)$ Einheiten des Medikamentes in der Außenwelt



Dem entspricht das System

$$\begin{cases} y_1' &= -(\alpha+\beta)\, y_1 &+ &\gamma\, y_2 \\ y_2' &= \beta\, y_1 &- &\gamma\, y_2 \\ y_3' &= \alpha\, y_1 \end{cases}$$

Von wirklichem Interesse ist nun das Teilsystem

$$\begin{cases} y_1' &= -(\alpha+\beta)\, y_1 &+ &\gamma\, y_2 \\ y_2' &= \beta\, y_1 &- &\gamma\, y_2 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

d.h.

$$\begin{array}{r|lllllll} & D\, y_1 & + & (\alpha+\beta)\, y_1 & - & \gamma\, y_2 & = & 0 \\ \times D & D\, y_2 & - & \beta\, y_1 & + & \gamma\, y_2 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} D^2\, y_2^2 - \beta\,[-(\alpha+\beta)\, y_1 + \gamma\, y_2] + \gamma D\, y_2 &= 0 \\ D^2\, y_2^2 - \beta \left[-(\alpha+\beta)\, \frac{y_2' + \gamma\, y_2}{\beta} + \gamma\, y_2\right] + \gamma D\, y_2 &= 0 \\ D^2\, y_2 + (\alpha+\beta+\gamma) D\, y_2 + \alpha\gamma\, y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ihre charakteristische Gleichung $\lambda^2 + (\alpha+\beta+\gamma)\lambda + \alpha\gamma = 0$ gibt

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\gamma}{4}}$$

und

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\gamma = (\alpha-\gamma)^2 + \beta^2 + 2\beta(\alpha+\gamma) > 0$$

und

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0. \quad \text{Also} \quad y_2(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Sind $y_1(0) = y_{10}$ und $y_2(0) = y_{20}$ zur Zeit $x = 0$ gegeben, haben wir

$$y_2(x) = -\frac{(\lambda_2 + \gamma)\ y_{20} - \beta\ y_{10}}{\lambda_1 - \lambda_2}\ e^{\lambda_1 x} + \frac{(\lambda_1 + \gamma)\ y_{20} - \beta\ y_{10}}{\lambda_1 - \lambda_2}\ e^{\lambda_2 x}$$

und daraus folgt

$$y_1(x) = -\frac{(\lambda_2 + \gamma)\ y_{20} - \beta\ y_{10}}{\lambda_1 - \lambda_2}\ \frac{\lambda_1 + \gamma}{\beta}\ e^{\lambda_1 x} + \frac{(\lambda_1 + \gamma)\ y_{20} - \beta\ y_{10}}{\lambda_1 - \lambda_2}\ \frac{\lambda_2 + \gamma}{\beta}\ e^{\lambda_2 x}.$$

Kapitel 7

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung ist in der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f(x) \qquad \text{mit } a_i(x) \in \mathbb{R}$$

Sie ist äquivalent zu dem System (mit $y_1 = y$)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -(a_{n-1}y_n + \ldots + a_0 y_1) + f(x) \end{aligned}$$

In Matrix-Form: $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}$

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

<u>SATZ:</u> (Existenz und Eindeutigkeit)

Sind $a_i(x),\ i = 0, \ldots, n-1$ und $f(x)$ stetig in J, und ist $x_0 \in J$, so hat das AWP

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f(x)$$

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

genau eine Lösung in J.

Die homogene Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$$

hat n **linear unabhängige Lösungen**

$$y_1(x), \ldots, y_n(x)$$

Sie bilden ein Hauptsystem.

Betrachtet man die homogene Differentialgleichung als System, so hat man folgendes Hauptsystem:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Dann genügt die Wronski-Determinante $\phi(x) = \det Y(x)$ der Differentialgleichung

$$\phi' = (\text{sp } A) \cdot \phi \qquad \text{wobei} \quad \text{sp } A = -a_{n-1}(x)$$

$$\text{d.h.:} \qquad \phi(x) = \phi(x_0) \; \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(s)\; ds\right) \qquad \begin{bmatrix} \text{entweder } = 0 \\ \text{oder } \neq 0 \end{bmatrix}$$

Wie bei den Systemen gilt

Es ist im Allgemeinen nicht möglich, die Lösungen einer homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung in geschlossener Form anzugeben.

Reduktionsverfahren von d'Alembert

Sei $y_1(x) \neq 0$ eine Lösung, so erhält man mit dem Produktansatz $y(x) = u(x)\; y_1(x)$ eine Differentialgleichung der Form.

$$u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + b_1 u' = 0$$

und mit der Substitution $w = u'$ hat man eine Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung:

$$w^{(n-1)} + b_{n-1}w^{(n-2)} + \ldots + b_1 w = 0$$

Ist $\{w_2, \ldots, w_n\}$ ein Hauptsystem derselben, so hat man mit

$$y_1, \quad y_1 \int w_2 dt, \quad y_1 \int w_3 dt, \; \ldots \; , \quad y_1 \int w_n dt$$

ein Hauptsystem der ursprünglichen Gleichung.

Betrachten wir die inhomogene Differentialgleichung $f(x) \neq 0$:

Die allgemeine Lösung ist in der Form

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + y_p \ ,$$

wobei y_p **eine** Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

7.0.1 Die Eulersche Differentialgleichung

Darunter versteht man eine Differentialgleichung der Form

$$b_n x^n y^{(n)} + b_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_0 y = 0$$

Man kann sich auf $x > 0$ beschränken, da mit $y(x)$ auch $y(-x)$ eine Lösung ist.

Die Substitution

$$x = e^t \qquad y(e^t) = u(t) \qquad y(x) = u(\lg x)$$

führt wegen

$$u' = y'x, \ u'' = y'x + y''x^2, \ldots$$

zu

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \ldots + a_0 u = 0$$

wobei $a_0 = b_0, \ a_n = b_n$

7.1 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Über den Euler-Ansatz $y = e^{\lambda x}$ findet man

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$

das charakteristische Polynom. Wir haben den

SATZ:

Ist λ eine reelle k-fache Nullstelle von $P_n(\lambda)$, so entsprechen ihr k Lösungen

$$e^{\lambda x}, \ x e^{\lambda x}, \ldots, \ x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

Sind $\lambda = \mu \pm i\nu$ komplexe Nullstellen von k-ter Ordnung, so hat man

$$e^{\mu x}\cos\nu x,\ xe^{\mu x}\cos\nu x, \ldots,\ x^{k-1}e^{\mu x}\cos\nu x$$

$$e^{\mu x}\sin\nu x,\ xe^{\mu x}\sin\nu x, \ldots,\ x^{k-1}e^{\mu x}\sin\nu x$$

7.1.1 Methode der Variation der Konstanten

Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung $f(x) \neq 0$. Die allgemeine Lösung ist in der Form

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + y_p$$

wobei y_p ***eine*** Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Mit der Methode der Variation der Konstanten setzen wir

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$$

Von Systemen geleitet findet man:
Sei

$$\phi_i = \det \widetilde{Y}_i = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_{i-1} & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_{i-1}' & y_{i+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-2)} & y_{i+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{pmatrix} \qquad \phi = \det Y$$

Man erhält $\widetilde{Y}_i$ aus Y, indem man Y ohne i-te Spalte und n-te Zeile anschreibt; dann ist

$$c_i(x) = (-1)^{n+i} \int_{x_0}^{x} f(s)\frac{\phi_i(s)}{\phi(s)}\ ds$$

Beispiel für den Fall $n = 2$:

$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ - gilt also:
Sei $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$ mit $\phi = \det Y$: $\widetilde{Y}_1(x) = y_2,\ \widetilde{Y}_2(x) = y_1$. Dann ist

$$y_p(x) = \left[-\int_{x_0}^{x} f(s)\frac{y_2(s)}{\phi(s)}\ ds\right] y_1(x) + \left[\int_{x_0}^{x} f(s)\frac{y_1(s)}{\phi(s)}\ ds\right] y_2(x)$$

Kapitel 8

Stabilität

Wir untersuchen das Verhalten von Lösungen in unendlichen Intervallen und stellen uns die Frage nach der Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert. Folgende sind Beispiele für instabil und stabile Lösungen.

Beispiele:

AWP 1: $y' = y \quad y(0) = y_0 \quad$ die Lösung ist $y_1(x) = y_0 e^x$

AWP 2: $y' = y \quad y(0) = y_0 + \varepsilon \quad$ die Lösung ist $y_2(x) = (y_0 + \varepsilon)e^x$

Dann ist $y_2(x) - y_1(x) = \varepsilon e^x$, d.h. bei geändertem Anfangswert strebt die Differenz zweier Lösungen gegen unendlich.

Ganz anders für die Differentialgleichung $y' = -y$: Hier wird $y_2(x) - y_1(x) = \varepsilon e^{-x}$ und die Differenz strebt gegen Null für $x \to \infty$.

Im Allgemeinen sei $\underline{y}_1(x)$ eine Lösung des Systems

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \qquad \text{mit} \quad \underline{y}_1(0) = \underline{y}_{10}$$

Man nennt die Lösung $\underline{y}_1(x)$ **stabil**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass alle Lösungen $\underline{y}_2(x)$ von $\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y})$ mit $\underline{y}(0) = \underline{y}_{20}$, und

$$|\underline{y}_{10} - \underline{y}_{20}| < \delta$$

existieren und die Eigenschaft haben, dass $|\underline{y}_2(x) - \underline{y}_1(x)| < \varepsilon \qquad$ für $\quad 0 \leq x < \infty$.

Die Lösung $\underline{y}_1(x)$ wird **asymptotisch stabil** genannt, wenn sie stabil ist, und wenn ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$|\underline{y}_{10} - \underline{y}_{20}| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} |\underline{y}_1(x) - \underline{y}_2(x)| = 0.$$

Eine Lösung $\underline{y}_1(x)$ heißt **instabil**, wenn sie nicht stabil ist.

Abbildung 8.1:

8.1 Stabilität für lineare Systeme

Sei A eine konstante Matrix. Betrachten wir die Lösung von

$$\underline{y}' = A\underline{y}$$

Wir haben folgende Stabilitätssatz:

Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_p \quad (p \leq n)$ die Eigenwerte von A und $\gamma = \max\{\text{Re } \lambda_i \mid i = 1, \dots, p\}$.
Dann ist die Lösung $\underline{y}(x) = 0$ im Falle

- $\gamma < 0$ ... asymptotisch stabil
- $\gamma > 0$ ... instabil
- $\gamma = 0$ ... stabil oder instabil; nicht asymptotisch stabil

8.2 Nichtlineare Systeme mit linearem Hauptteil

Für

$$\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{g}(x, \underline{y})$$

haben wir folgende Stabilitätssatz:

Die Funktion $\underline{g}(x, \underline{y})$ sei für $x \geq 0, |\underline{y}| \leq \alpha$ stetig und es gelte

$$\lim_{|\underline{y}| \to 0} \frac{|\underline{g}(x, \underline{y})|}{|\underline{y}|} = 0 \qquad \text{gleichmäßig für } x \geq 0$$

weiters: $\underline{g}(x, 0) = \underline{0}$

Die Matrix A sei konstant und $\text{Re}\lambda_i < 0$ für $i = 1, \dots, p \quad (p \leq n)$. Dann ist die Lösung $\underline{y}(x) \equiv 0$ **asymptotisch stabil**. Wenn $\text{Re}\lambda > 0$ für mindestens einen Eigenwert λ von A, dann ist die Lösung $\underline{y}(x) \equiv 0$ **instabil**.

Betrachten wir den Fall von **Autonome Systeme** $\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y})$ mit $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$ und jede Komponente f_i sei in eine Potenzreihe entwickelbar:

$$f_i(y_1, \dots, y_n) = a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n + (\textit{Glieder der Ordnung } \geq 2in|y|).$$

Dann betrachtet man die Differentialgleichung

$$\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{g}(\underline{y}),$$

und die Lösung $\underline{y} \equiv 0$ von $\underline{y}' = f(\underline{y})$ ist stabil (instabil), wenn dasselbe für die linearisierte Gleichung $\underline{y}' = A\underline{y}$ gilt.

Wir betrachten lineare inhomogene Systeme $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{f}(x)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine konstante Matrix ist, deren Eigenwerte $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,n}$ einfach sind (Vielfachheit 1), und

$$A\underline{k}_i = \lambda_i \underline{k}_i$$

mit $\underline{k}_i,\ i = 1,\dots,n$ Eigenvektoren.
In diesem Fall bilden die Eigenvektoren $\underline{k}_i$ eine Eigenbasis von $\mathbb{R}^n$. So kann jeder Anfangswert $\underline{y}_0$ an x_0 als Kombination von $\underline{k}_i$ geschrieben werden:

$$\underline{y}_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{k}_i$$

Damit ist die Lösung von $\underline{y}' = A\underline{y}$ mit dem Anfangswert $\underline{y}_0$ gegeben durch (Euler Ansatz)

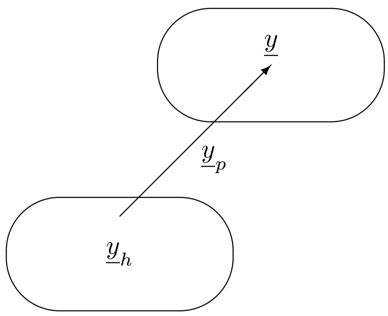
$$\underline{y}_h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\lambda_i (x-x_0)} \underline{k}_i$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann

$$\underline{y}(x) = \underline{y}_h(x) + \underline{y}_p(x),$$

wobei $\underline{y}_p(x)$ **eine** partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Das heißt also, dass die allgemeine Lösung einer inhomogenen Gleichung ein **affiner Raum** ist. Dies resultiert aus der Translation des Raumes der allgemeinen Lösungen der homogenen Gleichung durch einen Vektor, der $\underline{y}_p$ repräsentiert.



Jetzt wollen wir noch die Struktur des Raumes der allgemeinen Lösungen von $\underline{y}' = A\underline{y}$ (bzw. $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{f}(x)$) anhand des folgenden Beispiels klassifizieren:

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underline{y}$$

Wir haben $\mathrm{sp}A = a + d$, $\det A = ad - bc$. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - (\mathrm{sp}A)\lambda + (\det A) = 0 \qquad \text{und} \qquad \Delta = (\mathrm{sp}A)^2 - 4(\det A).$$

Es folgt:

$$\begin{array}{lll} \Delta > 0 & \lambda_1 \neq \lambda_2 & \text{reelle Eigenwerte} \\ \Delta = 0 & \lambda_1 = \lambda_2 & \text{reelle Eigenwerte} \\ \Delta < 0 & \lambda_1 = \overline{\lambda}_2 & \text{komplexe Eigenwerte} \end{array}$$

Fall 1: $\Delta > 0$

$$\underline{y}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} \underline{k}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} \underline{k}_2$$

Wir können jetzt die Lösung $\underline{y}(x)$ im $\mathbb{R}^2$ in der Basis $\{\underline{k}_1, \underline{k}_2\}$ abbilden:

1. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$
   Instabiler Knotenpunkt

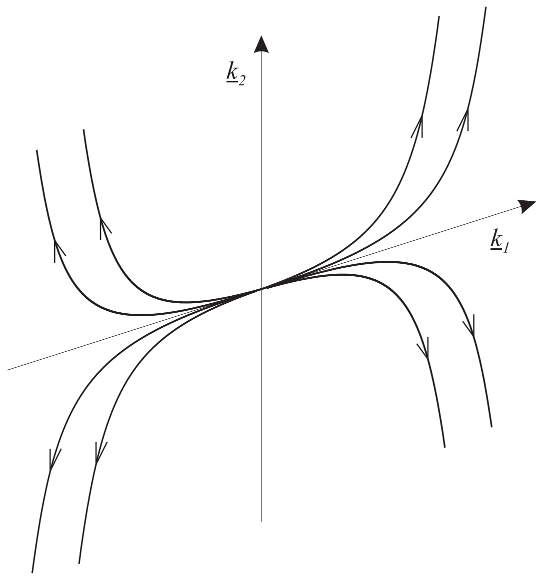


Abbildung 8.2: Instabiler Knotenpunkt

2. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
   Sattelpunkt (instabil)

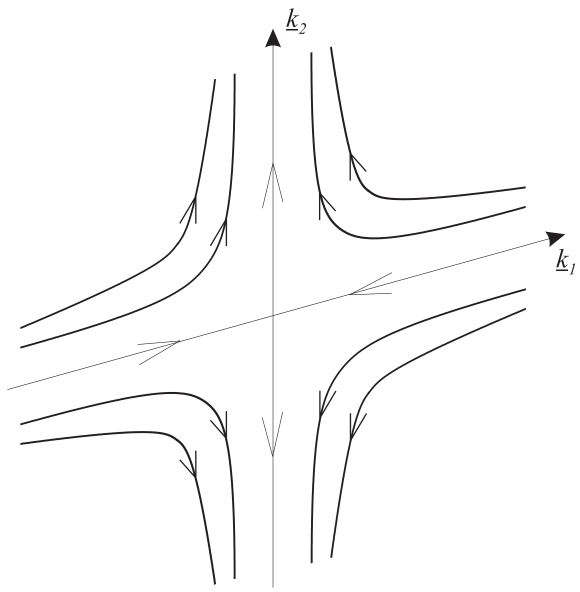


Abbildung 8.3: Sattelpunkt

3. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
   Stabiler Knotenpunkt (asymptotisch stabil)

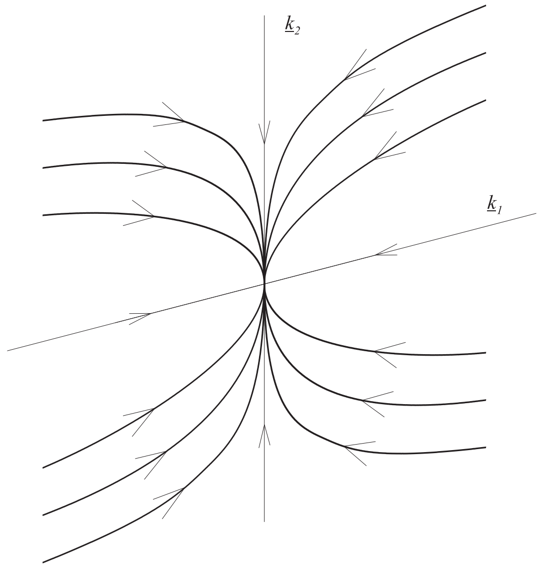


Abbildung 8.4: Stabiler Knotenpunkt

Fall 2: $\Delta < 0$

$$\underline{y}(x) = \underline{k}_1 e^{\mu x} \cos(\nu x) + \underline{k}_2 e^{\nu x} \sin(\nu x) \quad \text{mit} \quad \lambda = \mu + i\nu$$

1. $\mu < 0$
   Stabiler Strudelpunkt (asymptotisch stabil)

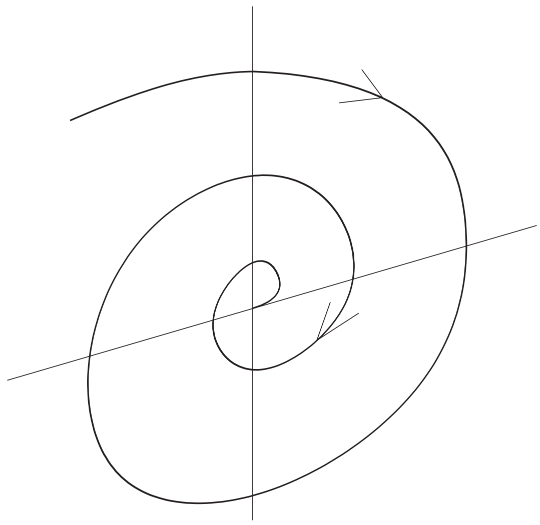


Abbildung 8.5: Stabiler Strudelpunkt

2. $\mu > 0$
   instabiler Strudelpunkt (instabil)

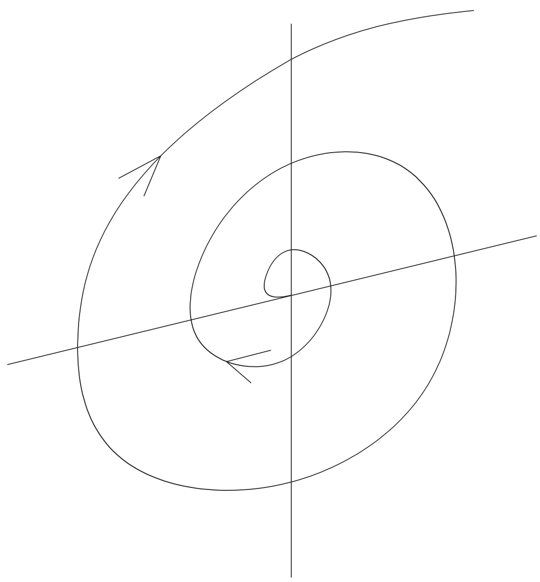


Abbildung 8.6: instabiler Strudelpunkt

3. $\mu = 0$
   Zentrum (stabil)

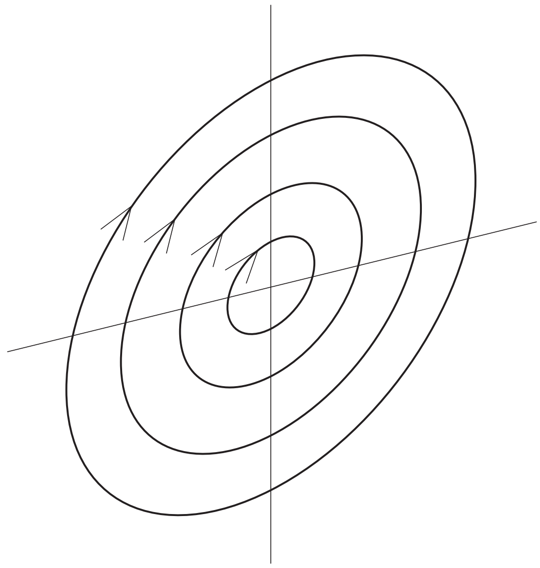


Abbildung 8.7: Zentrum

Fall 3: $\Delta = 0$

1. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$
   asymptotisch stabiler Knoten

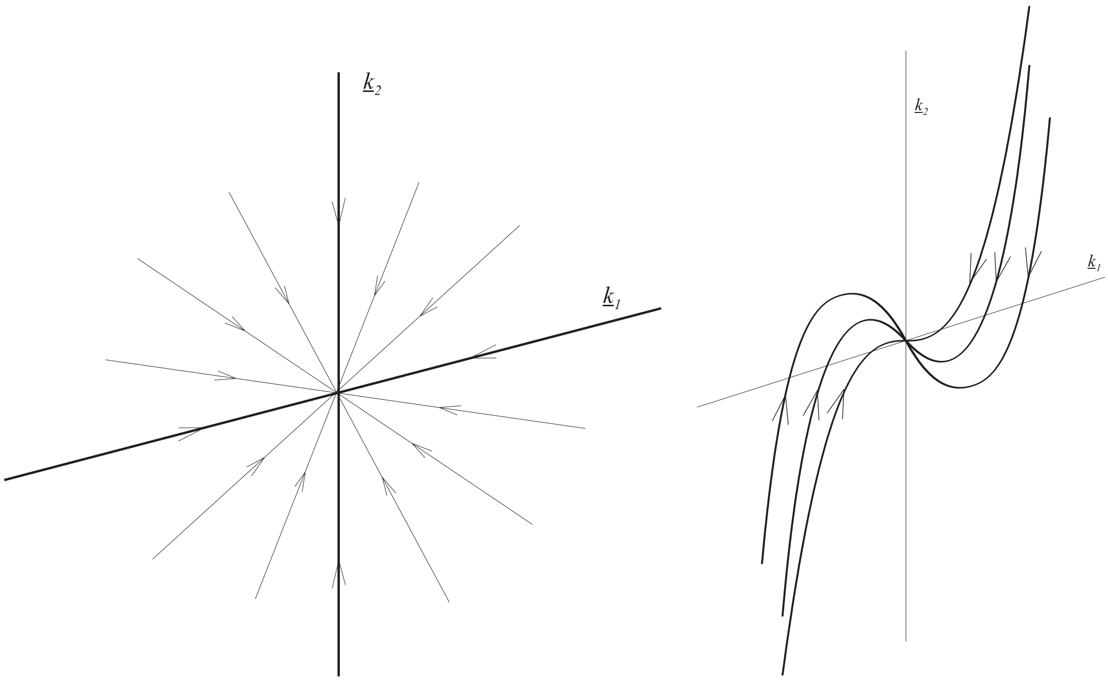


Abbildung 8.8: asymptotisch stabiler Knoten

2. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$
   instabiler Knoten

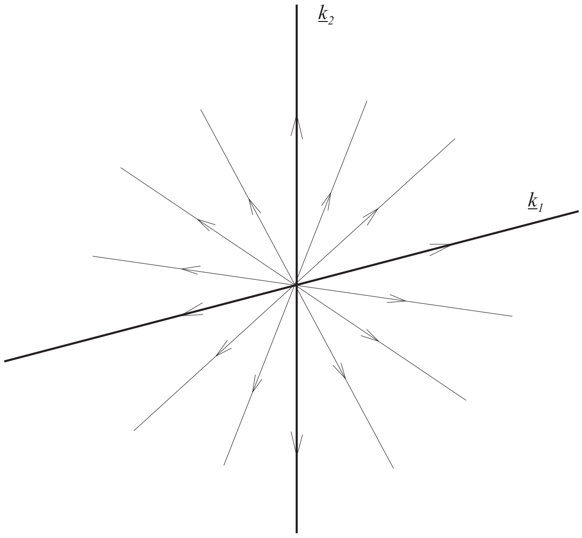


Abbildung 8.9: instabiler Knoten

Wir geben das Bifurkations-Diagramm für $\underline{y}' = A\underline{y}$ an: $\Delta = (\mathrm{sp}A)^2 - 4(\det A)$

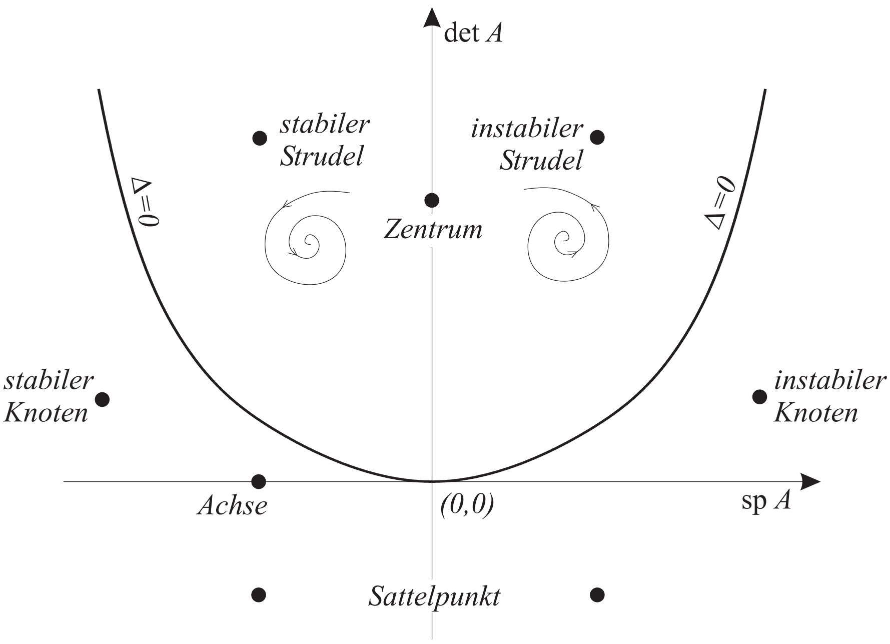


Abbildung 8.10:

8.3 Systeme von nichtlinearen Differentialgleichungen

Wir betrachten Systeme der Form $\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y})$ (keine x; autonome Systeme) für den Fall $n = 2$ mit $\underline{y} = (y, z)$:

$$\begin{cases} y' = f(y,z) \\ z' = g(y,z) \end{cases} \tag{8.1}$$

Die **Ruhelage** der Differentialgleichung ist der Punkt (y_0, z_0), so dass

$$f(y_0, z_0) = 0$$
$$g(y_0, z_0) = 0$$

(auch singulärer Punkt genannt; entspricht der Lösung $\underline{y} \equiv 0$ im linearen Fall).

Ruhelagen und deren Eigenschaften sind wichtig z.B. in der Mechanik. Wir untersuchen die Lösung von Gleichung (8.1) in der Nähe von (y_0, z_0).
Seien $\xi = y - y_0$ und $\eta = z - z_0$ die Entfernung von (y_0, z_0). Die Linearisierung von (8.1) um (y_0, z_0) ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}_{(y_0, z_0)} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

SATZ:

Wenn das System (8.1) eine Ruhelage hat und die Linearisierung (8.2) dort einen **stabilen (instabilen) Knoten/Punkt** hat, dann hat auch das ursprüngliche System (8.1) einen **stabilen (instabilen) Knoten/Punkt**.

Beispiel:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\sin y_1 - y_2 \end{cases}$$

Ruhelage:

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= 0 \\ -\sin y_1 - y_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad (0,0) \quad (\pi, 0)$$

Die Linearisierung um $(0, 0)$ ist

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathrm{sp} A &= -1 \\ \det A &= 1 \end{aligned}$$

Wir haben einen **stabilen Punkt**.

Die Linearisierung um $(\pi, 0)$ ist

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{sp} A = -1 \\ \det A = -1 \end{array}$$

Wir haben einen Sattelpunkt (instabil).

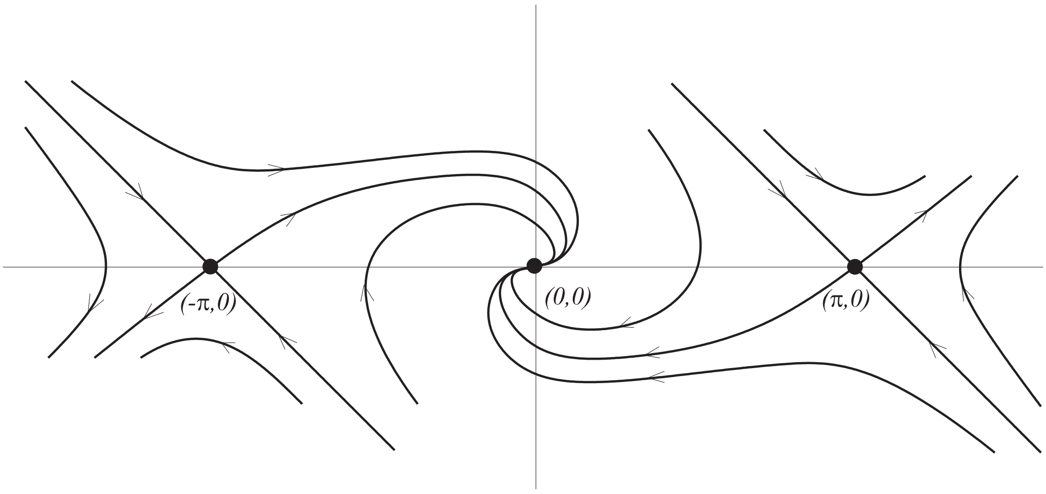


Abbildung 8.11:

Wenn (8.2) ein **Zentrum** hat, bleiben alle Möglichkeiten vorhanden.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} + \varepsilon(y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Hier ist $(0, 0)$ ein Punkt für Ruhelage. Die Linearisierung um $(0, 0)$ ist

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \mathrm{sp}\ A = 0 \qquad \det\ A = 1 > 0$ (Zentrum)

Aber die ursprüngliche Differentialgleichung hat einen **instabilen Strudelpunkt** für $\varepsilon > 0$ und einen **stabilen Strudelpunkt** für $\varepsilon < 0$.

z.B. für $\varepsilon = -1$ um $(0,0)$:

Man setzt $u = y_1^2 + y_2^2$, dann ist

$$\begin{aligned} u' &= 2y_1y_1' + 2y_2y_2' = 2y_1(-y_2 - uy_1) + 2y_2(y_1 - uy_2) \\ &= -2y_1y_2 - 2uy_1^2 + 2y_1y_2 - 2uy_2^2 \\ &= -2u \cdot u \\ \Rightarrow u' &= -2u^2 \end{aligned}$$

also $u \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ und somit $\underline{y} \rightarrow \underline{0}$.

8.4 Die Liapunov-Funktion

Sei $\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y})$ mit $\underline{y} = (y_1, y_2)$.

<u>Definition:</u> Funktion von LIAPUNOV

Eine stetige differenzierbare Funktion $F(\underline{y})$, definiert in einer Umgebung U von $\underline{y}_0$ (Ruhelage), $f(\underline{y}_0) = 0$ ist eine **Funktion von Liapunov** für $\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y})$, wenn

(1) F hat ein einziges Minimum in $\underline{y}_0$.

(2) $\nabla F(\underline{y}) \cdot \underline{f}(\underline{y}) \leq 0$ für $\underline{y}(x) \in U$, wobei $\nabla F(\underline{y}) = \text{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}, \frac{\partial F}{\partial y_2}\right)$

Wenn gilt: $\frac{\partial F}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} \cdot f_2 < 0 \quad \Rightarrow$ **strenge** Liapunov-Funktion

(2) ist äquivalent zu $\frac{d}{dx} F\left(\underline{y}(x)\right) \leq 0$.

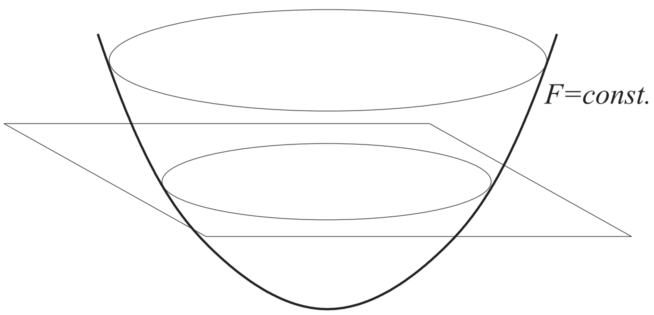


Abbildung 8.12:

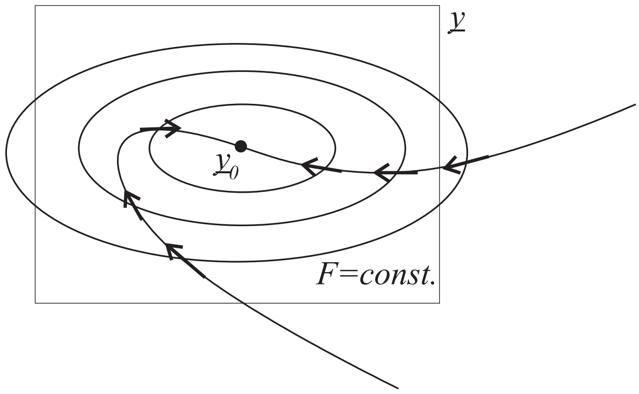


Abbildung 8.13:

alle Lösungen $\underline{y}(x)$ von $\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y})$ 'schneiden' $F(\underline{y}) = const.$

SATZ:

Wenn ein $\underline{y}_0$, $\underline{f}(\underline{y}_0) = 0$ eine Liapunov-Funktion hat, dann ist $\underline{y}_0$ ein **stabiler Knoten**, bei einer strengen Liapunov-Funktion ist es **asymptotisch stabil**.

Beispiel:

$$\begin{cases} y_1' = -y_1^3 - 2y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2^3 \end{cases} \quad \text{eine Ruhelage bei } (0,0).$$

Sei $F(\underline{y}) = y_1^2 + 2y_2^2$ und $\underline{f} = \begin{bmatrix} -y_1^3 - 2y_2 \\ y_1 - y_2^3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \nabla F &= (2y_1, 4y_2) \\ \nabla F \cdot \underline{f} &= 2y_1(-y_1^3 - 2y_2) + 4y_2(y_1 - y_2^3) \\ &= -2y_1^4 - 4y_1y_2 + 4y_1y_2 - 4y_2^4 \\ &< -2(y_1^4 + y_2^4) \;<\; 0 \end{aligned}$$

8.5 Grenzzyklus (Limit-Cycle)

Allgemein bezeichnet dieser Begriff einen für ein System 'attraktiven' dynamischen Zustand, im Sinne eines über die Zeit relativ stabilen Verhaltensmusters. Stabile Verhaltensmuster können, z.B., Ruhezustande oder 'komplexe' periodische Verhaltensweisen. Die zwei Attraktortypen werden Fixpunkt und Grenzzyklus genannt.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \alpha(1 - y_1^2 - y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

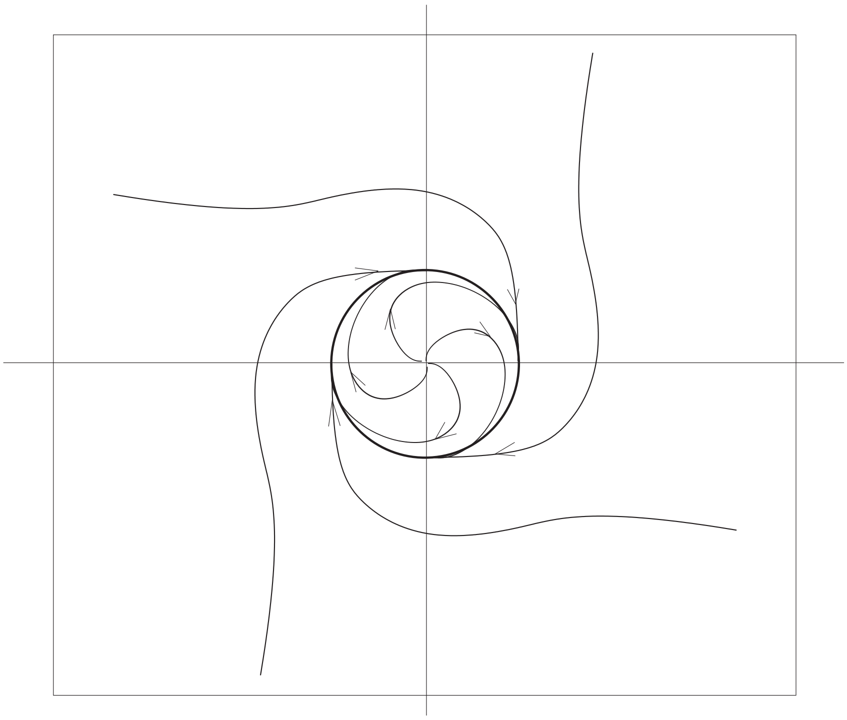


Abbildung 8.14:

Man setzt:

$$\begin{aligned} u^2 = y_1^2 + y_2^2 \quad &\rightarrow \quad 2uu' = 2y_1 y_1' + 2y_2 y_2' \\ \phi = \arctan \frac{y_2}{y_1} \quad &\rightarrow \quad \phi' = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} u' = \alpha(1 - u^2)u \\ \phi' = -1 \end{cases}$$

Für $\alpha > 0$ werden alle Lösungen mit $u(0) > 0$ zu $u = 1$ angezogen.
Für $\alpha < 0$ und $0 \leq u(0) < 1$ tendieren diese Lösungen zu $\underline{O}$, und mit $u(0) > 1$ gehen sie in Richtung Unendlich.

8.5.1 Poincaré-Bendixson-Satz

Seien $0 < \alpha(\phi) < \beta(\phi)$ zwei periodische stetig differenzierbare Funktionen (mit der Periode 2π) und sei der Ring U wie folgt definiert (Polarkoord.):

$$U = \{(u, \phi) | \alpha(\phi) \leq u \leq \beta(\phi)\}$$

und sei $\underline{f}(\underline{y}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{y}) \\ f_2(\underline{y}) \end{pmatrix}$ von $\underline{y}' = f(\underline{y})$.

Wenn $\underline{f}(\underline{y}) \cdot \begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} \neq 0$ in U, dann existiert in U ein **Grenzzyklus** von $\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y})$.

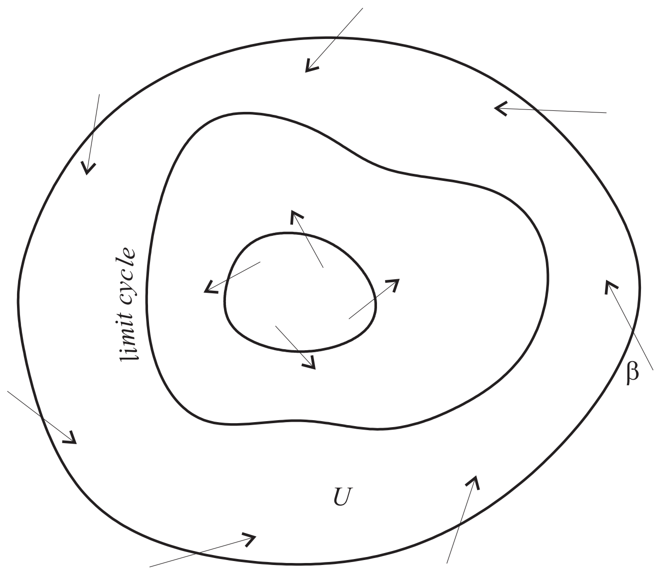


Abbildung 8.15:

Kapitel 9

Eigenwertprobleme

Das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem ist definiert wie folgende

$$\begin{aligned} Ly + \lambda r(x)y &= 0 \quad \text{in } J = [a,b] \\ R_a y &= 0 \\ R_b y &= 0 \end{aligned} \tag{9.1}$$

wobei

$$\begin{aligned} Ly &\equiv \frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y \\ R_a y &= \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) \\ R_b y &= \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) \end{aligned}$$

Beim Eigenwertproblem interessiert man sich für die Fälle, in denen für (9.1) mehrere Lösungen bei bestimmten Werten von λ vorliegen. Diese sind die **Eigenwerte** des Problems, zu der eine Lösung $y(x) \neq 0$ existiert - **Eigenfunktion** genannt. Mit $y(x)$ ist auch $c \cdot y(x)$ eine Eigenfunktion.

Beispiel:

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

Für $\lambda \leq 0$ gibt es nur die triviale Lösung $y(x) \equiv 0$.
Ist $\lambda = \mu^2 > 0$, so ist $y(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$ und von $y(0) = 0$ und $y(\pi) = 0$ ergibt sich $y(x) = \sin \mu x$ mit $\sin \mu\pi = 0 \;\Rightarrow \mu \in \mathbb{N}$ und daraus folgt $\lambda_n = n^2$ **Eigenwerte** und $y_n(x) = \sin nx$ **Eigenfunktionen**.

Unter der folgenden Voraussetzung

$$p(x) \in C^1(J);\; q(x), r(x) \in C^0(J) \quad p(x) > 0;\; r(x) > 0;\; \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0;\; \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0$$

gibt es zum Eigenwertproblem (9.1) unendlich viele reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \ \to \infty \qquad n \to \infty.$$

Die Eigenwertfunktionen lassen sich normieren, sodass

$$\int_a^b r(x) y_n(x)^2 \ dx = 1.$$

Sie bilden dann ein Orthonormalsystem

$$\int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) \ dx = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

und jede Funktion $\varphi(x) \in C^1(J)$, die der Randbedingung genügt, lässt sich folgendermaßen entwickeln:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(\alpha).$$

Kapitel 10

Literaturverzeichnis

1. H. Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner, 1989.

2. W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer, 1990.

3. J.H. Hubbard - B.H. West, Ordinary Differential Equations, Vol. I&II, Springer, 1991.