KARL-FRANZENS-UNIVERSITÄT GRAZ

„Seminar aus Reiner Mathematik“

Die Museumswächter

Krupic Mustafa

Wintersemester 2013/14

Inhaltsverzeichnis

1 EINLEITUNG

In dieser Seminararbeit wird das Problem der Museumswächter behandelt. Genauer gesagt wird die folgende Situation untersucht:

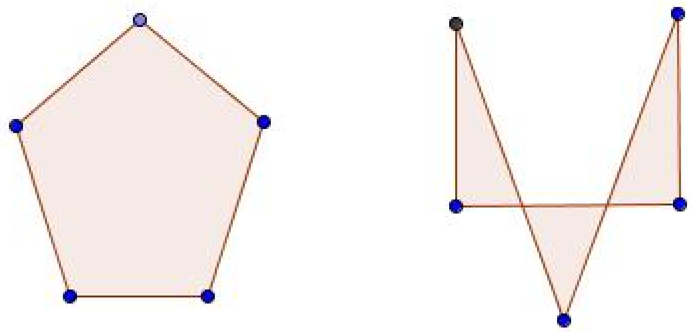
„Gegeben ist ein Polygon P das den Grundriss eines Museums darstellt. Man soll nun möglichst wenige Punkte im Inneren des Polygons wählen, die die Wächter darstellen, sodass jeder Punkt im Inneren des Polygons mit einem Wächter verbunden werden kann und die Verbindungslinie ganz in P einschließlich dem Rand liegt.“

Das heißt, dass der Wächter an einen Punkt gebunden ist und sich nur im Kreis drehen kann.

Dies ist eine Fragestellung der algorithmischen Geometrie, die ein Teilgebiet der Informatik ist, welche sich mit der algorithmischen Lösung geometrischer Probleme befasst. In der Praxis kann man manche Fragestellung der Bildverarbeitung auf das Problem des Museumswächters zurückführen.

In der Theoretischen Informatik fällt das Problem in die Kategorie der Approximationsalgorithmus-Probleme, was bedeutet, dass wahrscheinlich kein Algorithmus existiert, der das Problem für allgemeine Polygone mit wenig Zeitaufwand bezüglich der Rechenoperationen richtig lösen kann.

Wir betrachten zunächst die einfachen Fälle, falls wir ein Dreieck oder ein Viereck als Grundriss haben. In diesem Fall reicht immer ein einziger Wächter aus. Bei einem Fünfeck gibt es schon Fälle, in denen ein einziger Wächter nicht mehr ausreicht.



Wie man leicht sehen kann, kann man den Wächter in der linken Abbildung im Vieleck beliebig postieren und es reicht immer ein einziger aus. In der rechten Abbildung braucht man hingegen mindestens zwei Wächter, wobei einer auf dem Schnittpunkt zweier Dreiecke steht und der andere irgendwo im dritten Dreieck.

Wir stellen uns nun die Museen als Graphen, besser gesagt als Polygone, vor, wobei die Kanten die Wände darstellen.

Dazu einige Defintionen:

Definition 1 (Polygon)
Ein *Polygon* ist eine Figur, die durch ein Tupel $P := (p_1, p_2, \ldots, p_n), p_i \in \mathbb{R}^2, 1 \leq$i$\leq n$ von n verschiedenen Punkten definiert ist. Die n Punkte heißen Eckpunkte des Polygons.

Die Verbindungsstrecken $\overline{p_i p_{i+1}} \forall i = (1, \ldots, n-1)$ nennt man Kanten und alle anderen Verbindungstrecken $\overline{p_i p_j}$ sind Diagonalen des Polygons.

Ein Polygon bezeichnet man als einfach falls der Schnitt zweier Kanten entweder leer ist oder eine Ecke ist, und jede Ecke zu höchstens zwei Kanten gehört.

Definition 2 (Polygonzug)
Sind $p_1, p_2, \ldots, p_n, n \in \mathbb{N}$ Punkte in der euklidischen Ebene, dann heißt die Vereinigung der Strecken $[p_1, p_2] \cup [p_2, p_3] \cup \ldots \cup [p_{n-1}, p_n]$ Polygonzug von p_1 nach p_n. Fallen p_1 und p_n zusammen, spricht man von einem geschlossenen *Polygonzug*, sonst von einem offenen Polygonzug.

Definition 3 (Graph)
Ein *Graph* G ist ein Tupel (V, E), wobei V eine Menge von Knoten und E eine Menge von Kanten bezeichnet.

Definition 4 (ebener Graph)
Sei G ein Graph. G heißt ein *ebener Graph*, falls gilt:

i) V besteht aus paarweise disjunkten Punkten des $\mathbb{R}^2$.

ii) Jede Kante ist ein Polygonzug, der 2 Ecken miteinander verbindet.

iii) Die Kanten schneiden sich nie und berühren sich bloß in den Ecken.

iv) Verschiedene Ecken werden durch verschiedene Kanten verbunden.

Die letzte Eigenschaft schließt hier *Multigraphen* aus, da in dieser Arbeit nur einfache planare Graphen betrachtet werden.

Definition 5 (konvex)
Sei P ein Polygon. Ein Polygon heißt *konvex*, wenn

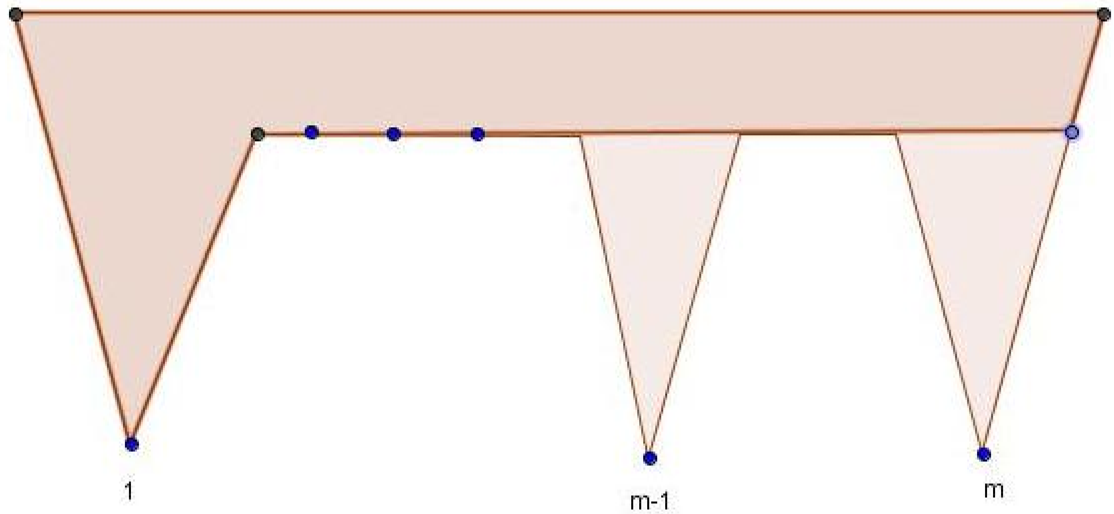
$$\forall x, y \in P \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ gilt} : \lambda * x + (1 - \lambda) y \in P$$

D.h. wenn die Verbindungslinie zwischen zwei beliebigen Punkten aus dem Polygon wieder ganz in P enthalten ist.

Da konvexe ebene Polygone der einfachste und somit der uninteressanteste Fall sind, und ein Wächter für so ein Museum immer reicht, gehen wir in der restlichen Arbeit von nicht konvexen Polygonen aus.

Zur Veranschaulichung des Problems betrachten wir folgendes Beispiel:

Ein Polygon mit $n = 3m$ Kanten, das aussieht wie ein Kamm:



Der dunkel schattierte Bereich kann von einem Wächter überwacht werden, aber für alle anderen Dreiecke, die übrig bleiben, braucht man jeweils einen Wächter, d.h. mindestens m Wächter werden benötigt. Postiert man die m Wächter auf die obere Kante, so reichen diese $m = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter auch aus.

Diese Beobachtung motiviert uns zum *Museumwächter-Satz*, der im nächsten Kapitel behandelt wird.

2 MUSEUMSWÄCHTER-SATZ

Der Satz wurde von *Vašek Chvátal (1975)* aufgestellt und bewiesen. Der Satz formuliert eine stärkere Aussage, nämlich für ein beliebiges Polygon mit n Ecken.

Satz 1 (Museumswächter-Satz)**.** *Für jedes Museum mit n Wänden reichen* $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ *Wächter aus.*

Der Beweis, der auf drei Schritten beruht, stammt von *Steve Fisk (1978)*:

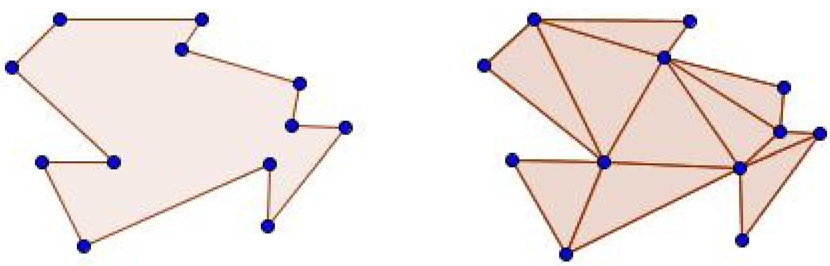
2.1) Triangulation des Polygons

2.2) 3-Färbung der Triangulation

2.3) Schlussfolgerung(Anwendung)

2.1 TRIANGULATION DES POLYGONS

Definition 6
Die *Triangulation* eines einfachen Polygons P ist ein planarer Graph, den man erhält indem man das innere des Polygons durch sich nicht schneidende Diagonalen mit Dreiecken ausfüllt.



Satz 2. *Für ein ebenes nicht notwendig konvexes Polygon existiert immer eine Triangulation.*

Beweis

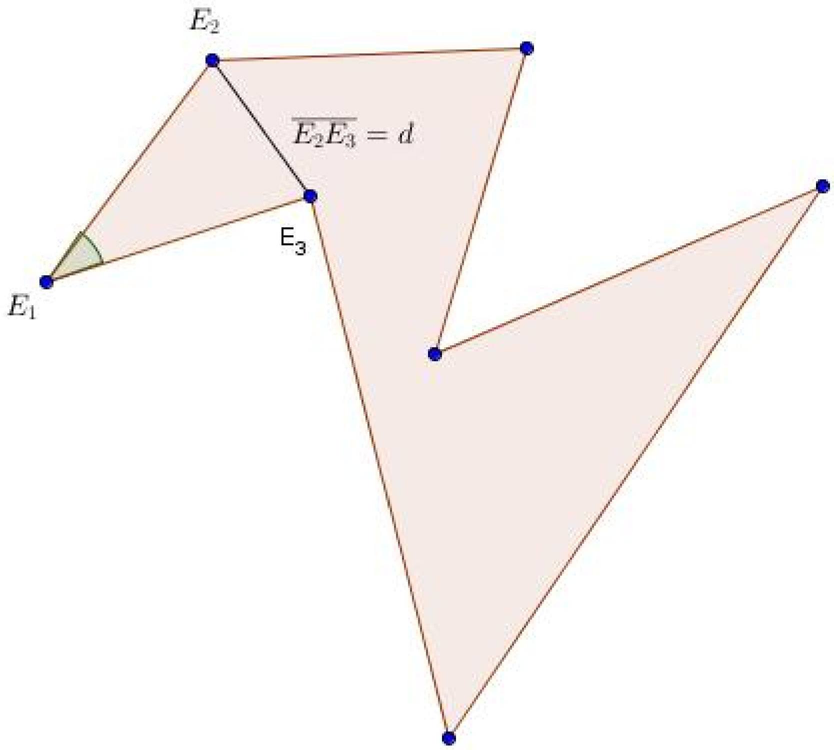
Für konvexe Polygone ist die Aussage klar.

Für nicht konvexe Polygone :

Induktionsanfang
$n = 3 \Rightarrow P$ ist ein Dreieck, d.h. die Triangulation selbst.

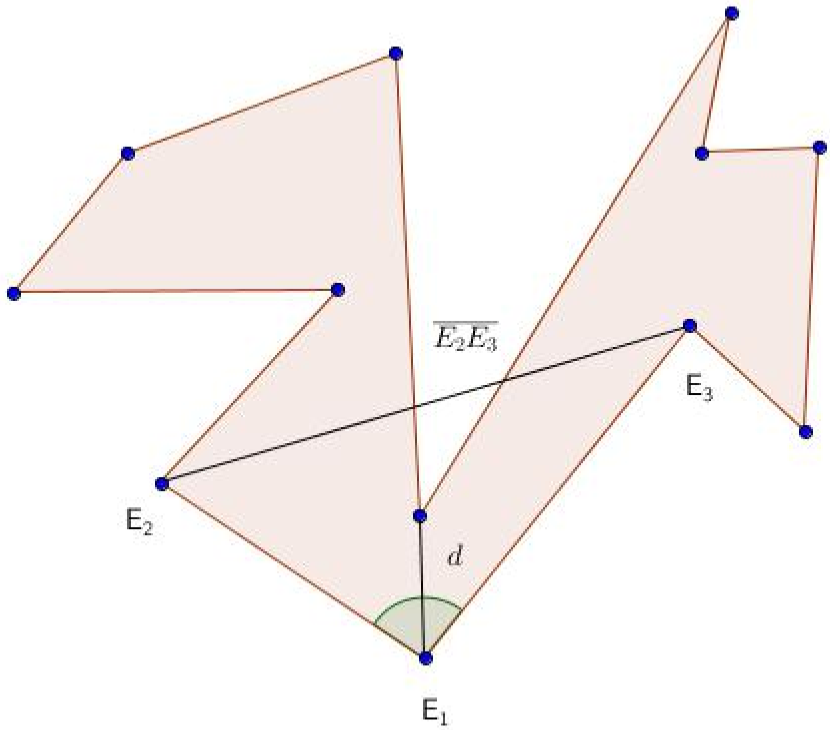
Induktionsvorrausetzung
Sei der Satz richtig für alle Polygone mit weniger als n Ecken.

Induktionsschritt $n - 1 \rightarrow n$
Nun suchen wir eine Diagonale d, die das Polygon P mit n Ecken in zwei Teile P_1 und P_2 teilt. Dazu nehmen wir uns eine konvexe Ecke E_1 des Polygons. Eine konvexe Ecke ist eine Ecke in der der Innenwinkel kleiner als 180° ist. So eine Ecke existiert immer da die Innenwinkelsumme gegeben ist durch $P = (n - 2) * 180°$, wobei n wie bisher die Anzahl der Ecken ist. Als nächstes verbindet man die Nachbahrecken von E_1, was uns zu einem der zwei Fälle führt:
Fall 1:
Die Verbindungslinie von E_2 und E_3 befindet sich ganz in P, z.B wie in der Abbildung



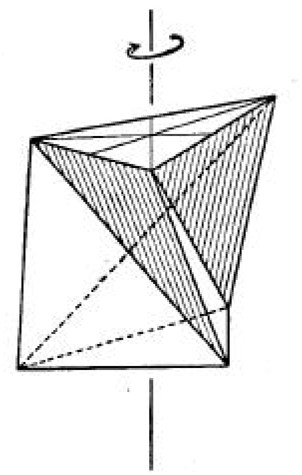
Dann wählt man diese Verbindungslinie als die Diagonale d. Diese Diagonale teilt das Polygon P nun in zwei Polygone P_1 und P_2 mit jeweils weniger als n Ecken. Auf diese Polygone P_1 und P_2 lässt sich nun die *Induktionsvorrausetzung* anwenden, welche besagt, dass P_1 und

P_2 triangulierbar sind. Daraus folgt, dass das ursprüngliche Polygon P mit n Ecken triangulierbar ist, weil P durch eine Diagonale aufgetrennt wurde und nach zusammensetzen der triangulierter Teile P_1 und P_2 nun ganz P trianguliert ist.
Fall 2:
Die Verbindungslinie von E_2 und E_3 befindet sich nicht ganz in P, z.B wie in der Abbildung



Das heißt dass in dem Dreieck $E_1E_2E_3$ mindestens eine Ecke des Polygons P liegen muss, weil es nur endlich viele Ecken gibt. Dann verbindet man eine Ecke aus dem Dreieck mit der konvexen Ecke E_1, und man kann wieder die *Induktionsvorrausetzung* anwenden. □

Bemerkung: Die Triangulation im 3-dimensionalen ist die Zerlegung eines Körpers in Tetraeder, und der obige Satz lässt sich auf den 3-dimensionalen Fall im Allgemeinen nicht erweitern. Ein Gegenbeispiel dafür ist das Schönhardt-Polyeder:



Solch ein Polyeder entsteht aus einem Dreiecksprisma, und der Drehung des Deckels. Für den Drehungswinkel δ gilt:

$$0 < \delta < 60^\circ.$$

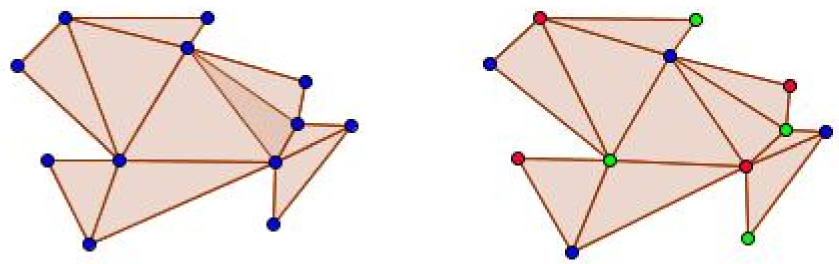
Ein Tetraeder müsste das Bodendreieck und eine weitere Ecke im Deckel enthalten, und so ein Tetraeder existiert nicht.

2.2 3-FÄRBUNG DER TRIANGULATION

Definition 7
Eine *Färbung* ist die Zuordnung einer Farbe oder Eigenschaft jeder Ecke des Polygons P, d.h. eine Funktion:

$$f : V \to F \text{ wobei } F \simeq N \subseteq \mathbb{N}$$

F ist die Menge der Eigenschaften bzw. Farben (zum Beispiel {rot,grün,blau}). Sie heißt zulässig oder gültig, falls je zwei benachbarte Ecken verschiedene Farben haben. Man nennt f eine 3-Färbung falls $|F| = 3$, also die Anzahl der Elemente in F gleich 3 ist, und gültig ist.



Satz 3. *Jede Triangulation eines Polygons P ist 3-färbbar.*

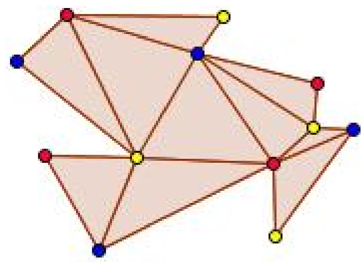
Beweis

Induktionsanfang
$n = 3 \Rightarrow P$ ist ein Dreieck, d.h P hat drei Ecken und somit ist es auch 3-färbbar.

Induktionsvorrausetzung
Sei der Satz richtig für Polygone mit weniger als n Ecken.

Induktionsschritt $n - 1 \rightarrow n$
Wir fangen mit der Triangulation von P an. Danach wählen wir zwei beliebige Ecken u und v, die durch eine Diagonale $\overline{uv}$ verbunden sind. Die Diagonale $\overline{uv}$ teilt das Polygon in zwei kleinere Polygone auf die jeweils weniger als n Ecken besitzen. Nun kann man die Induktionsvorrausetzung anwenden und die jeweils kleineren Polygone 3-färben wobei man nur beachten muss das die Ecken u und v, in beiden Polygonen, die selbe Farbe besitzen. Das zusammenfügen der kleineren Polygonen bringt uns wieder zum ursprünglichen Polygon P, woraus folgt, dass P 3-färbbar ist. □

2.3 SCHLUSSFOLGERUNG(ANWENDUNG)



In der obigen Abbildung ist ein 3-gefärbtes Polygon gezeigt.

$r \ldots$ Anzahl der Ecken die rot gefärbt sind.

$g \ldots$ Anzahl der Ecken die gelb gefärbt sind.

$b \ldots$ Anzahl der Ecken die blau gefärbt sind.

$n \ldots$ Gesamtanzahl der Ecken.

Mit $r, g, b, n \in \mathbb{N}$ und $n = r + g + b$
Wenn wir annehmen, dass $r \leq g \leq b$ gilt, so hat man
$r \leq g \leq b \Rightarrow 3r \leq n$. Dies ist äquivalent zu $r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$
Da die Färbung gültig ist und die Gebiete in der Färbung alle Dreiecke sind, hat jedes Dreieck genau eine rote, eine gelbe und eine blaue Ecke. Wir stellen uns nun die roten Ecken als die Positionen der Wächter im Museum vor. Das heißt aber nichts anderes als dass das ganze Museum überwacht wird.
Also sind im Allgemeinen $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter ausreichend für ein Museum mit n Ecken.

Von dem Museumswächter Satz gibt es viele Varianten da ja die Grundfläche eines Museums beliebig sein kann. Im Allgemeinen Fall reichen dann $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ nicht mehr aus, wie zum Beispiel wenn die Grundfläche Löcher hat.

Eine ungelöste Variante sieht zum Beispiel so aus :

Nehmen wir an, dass jeder Wächter an einer Wand des Museums entlang läuft, und alles überwacht, was von irgendeinem Punkt der Wand aus zu sehen ist. Wie viele solche Wandwächter sind nötig um das gesamte Museum zu überwachen?

LITERATUR

1. MARTIN AIGNER, GÜNTER M. ZIEGLER, KARL H. HOFMANN : *Das Buch der Beweise.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010
2. *www.wikipedia.org/wiki/Problem der Museumswächter*
3. VOLKMANN LUTZ : *eine Einführung in die Graphentheorie.* Wien, Springer 1991