Seminararbeit - Stumpfe Winkel

Katrin Jungert

5. Dezember 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**
- 1.1 Vorwort . . . 3
- 1.2 Wer war Paul Erdös? . . . 4
- 1.3 Danzer und Grünbaum . . . 4

2 Erarbeitung wichtiger Begriffe **4**
- 2.1 Definitionen . . . 4
- 2.2 Die Vermutung von Erdös . . . 5

3 Zwei Probleme auf einen Streich **6**
- 3.1 Die Beweiskette . . . 6
- 3.2 Beweis der Kette . . . 8
  - 3.2.1 Bemerkung . . . 8

4 Erweiterung auf Mengen, die nur spitze Winkel enthalten **11**
- 4.1 Beweis von Satz 2 . . . 12

5 Literaturverzeichnis **13**

Abbildung 1: Paul Erdös

1 Einleitung

1.1 Vorwort

Diese Seminararbeit behandelt das Thema **Stumpfe Winkel** aus dem Buch "Das Buch der Beweise"von Aigner und Ziegler. Ich war neugierig, welche hoch-mathematischen Fragestellungen sich Mathematiker zu einem eher einfach erscheinendem Thema, wie stumpfe Winkel machen. Denn wenn man eine Person auf der Straße fragt, ob sie weiß was ein stumpfer Winkel ist, wird der Großteil der Menschen mit ja antworten. Doch in dieser Arbeit wir der Begriff eines stumpfen Winkels in einem sehr viel abstrakterem Sinn betrachtet.
In dem Buch "Das Buch der Beweise"werden zwei Fragestellungen aufgeworfen, die auf keinen Fall einfach zu beantworten sind. Zum Einen stellt Paul Erdös die Vermutung auf, dass jede Menge, die mehr als 2^d Punkte in einem Raum $\mathbb{R}^d$ enthält, einen stumpfen Winkel bestimmt. Auf diese Vermutung wird im Folgenden für d= 2 noch genauer darauf eingehen.
Zum Anderen hat sich Victor Klee gefragt, wie groß ein Punktmenge im $\mathbb{R}^d$ sein könne, damit alle Punkte innerhalb eines Streifens liegen und die beiden ausgewählten Punkte jeweils auf einem Rand zu finden sind (=Äntipodalitätseigenschaft"). Die Antwort haben einige Zeit später die zwei Mathematiker Ludwig Danzer und Branko Gründaum gefunden, die zugleich beide Probleme mit einer gemeinsamen Antwort lösten. Wie sie auf die Lösung kamen und wie der dazugehörige Beweis nun aussieht wird in dieser Arbeit einen wesentlichen Part einnehmen. Die Antwort wir also dem Leser nicht verwehrt.
Der Erste von mir vorgeführte Beweis soll als kleine mathematische Einstimmung für die folgende Informationen dienen. Zu Beginn werden allgemeine Informationen zu den verwendeten Begriffen gebracht und die dazugehörigen Definitionen gebracht. Im zweiten Teil, wird die Antwort auf die Frage von Erdös und Klee anschaulich mittels Beweise, aufgeklärt. Im abschließenden Teil wird das Augenmerk auf eine Aussage über spitze Winkel gelegt und diese auch bewiesen.

1.2 Wer war Paul Erdös?

Sucht man im Internet nach dem Namen Paul Erdös stößt man auf eine Vielzahl von Artikeln, in denen seine Arbeit und sein Leben analysiert wird. Der ungarische Mathematiker lebte von 1913 - 1996 und beschäftigte sich über die Jahre mit mathematischen Gebieten, wie Kombinatorik, Graphentheorie und Zahlentheorie. Erdös bleibt der Mathematik für immer durch die nach ihm benannte Erdös-Zahl bekannt. Die Erdöszahl 1 meint, dass man Koautor von Erdös war. Die Zahl 2 meint, dass man mit einem Koautor von Erdös publiziert und so weiter. Oft setze Erdös für die Lösung eines mathematischen Problems ein Lösegeld aus, wobei ein mit 100 Dollar bestztes Problem, als nahezu unlösbar gilt. [2] Auch sein Wunsch nach einem Buch Gottes, in dem die perfekten Beweise für wichtige Sätze enthalten sind, wird noch lange in den Köpfen anderer Wissenschaftler zu finden sein.Dementsprechend lag auch sein persönliches mathematisches Werken im Finden von sehr eleganten Beweisen. In eine Vielzahl von Werken wird sich auf Paul Erdös berufen, so spricht auch Martin Aigner in seinem Text "Die pure Eleganz der Mathematik"[1], von Erdös als eine Legende der Mathematik des letzten Jahrhunderts. Aigner sagt:" Er war der produktivste Mathematiker der jüngeren Geschichte...". Erdös war aber keineswegs ein Einzelgänger in der Wissenschaft der Mathematik. So reiste er viel herum und tauschte sich in jedem Land gerne mit anderen Menschen über Mathematik aus und verweigerte es nicht seine Geistesblitze an die Allgemeinheit weiterzugeben.

1.3 Danzer und Grünbaum

Ludwig Danzer und Branko Grünbaum haben sowohl die Frage von Erdös, als auch Vicktor Klees Frage nach der Größe der Punktmenge, bei der es für zwei beliebige Punkte einen Streifen gibt, der die ganze Punktmenge enthält, und der die ausgewählten Punkte an verschiedenen Seiten des Randes hat, auf einmal beantwortet. 1962 haben Danzer und Grünbaum die Lösung durch eine Beweisungleichungskette, die mit 2^d anfängt und auch wieder aufhört, gefunden.[4]

2 Erarbeitung wichtiger Begriffe

Die Aufarbeitung des folgenden Satzes beginnt zunächst mit grundlegenden Definitionen und allseits bekannten Gültigkeiten, um einen Grundstock zu bieten. Anschließend wird wird durch die einzelnen Beweise der Ungleichunskette auf eine gültige Aussage geschlossen und man erhält die Antwort auf die oben angeführten Fragestellungen. Die Beweisführung folgt fast ausschließlich der Durchführung von [4].

2.1 Definitionen

Definition 1 (Punkt nach Euklid) *Was keine Teile hat ist ein **Punkt**.*

Definition 2 (Halbgerade) *Eine **Halbgerade** ist eine Strecke, die einen Startpunkt hat, aber keinen Endpunkt.*

Definition 3 (Winkel) *Der **Winkel** ist ein geometrisches Gebilde zweier Halbgeraden. Seien f, g zwei Geraden, die sich in einem Punkt S schneiden, so teilt der Punkt S die Geraden f, g in Halbgeraden. Je eine Halbgerade von f und g (die Schenkel) zusammen mit S (den Scheitel) bilden einen Winkel.*

Definition 4 (stumpfer Winkel) *Der **stumpfe Winkel** beschreibt einen Winkel größer als 90 Grad und kleiner als 180 Grad.*

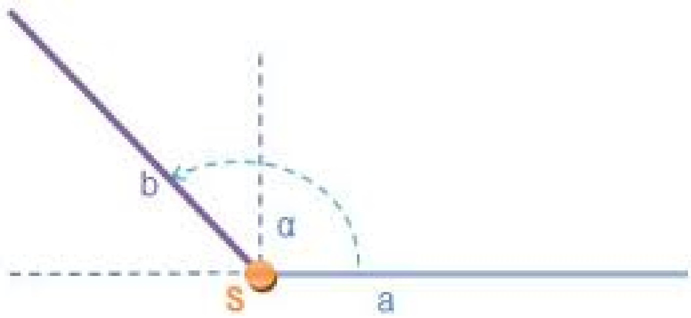

Abbildung 2: Beispiel eines stumpfen Winkels

Definition 5 (Dreieck) *Ein **Dreieck** ist ein Polygon und eine geometrische Figur. Es handelt sich innerhalb der euklidischen Geometrie um die einfachste Figur in der Ebene, die von geraden Linien begrenzt wird. Seine Begrenzungslinien bezeichnet man als Seiten. In seinem Inneren spannen sich drei Winkel, die sogenannten Innenwinkel auf. Die Scheitel dieser Winkel bezeichnet man als Eckpunkte des Dreiecks.*

Definition 6 (konvexe Menge) *Eine Teilmenge eines euklidischen Raums **konvex**, wenn für je zwei beliebige Punkte, die zur Menge gehören, auch stets deren Verbindungsstrecke ganz in der Menge liegt. Dies garantiert, dass die Menge an keiner Stelle eine (konkave) Einbuchtung hat.*

Definition 7 (konvexe Hülle) *Die **konvexe Hülle** einer Teilmenge ist die kleinste konvexe Menge, die die Ausgangsmenge enthält.*

2.2 Die Vermutung von Erdös

Wie bereits erwähnt ging Erdös davon aus, dass sich in jeder Menge mit einer Anzahl von $> 2^d$ Punkten in einem Raum $\mathbb{R}^d$ ein stumpfer Winkel befindet. Anders formuliert: In einer Punktteilmenge $\leq 2^d$ dieses Raumes lassen sich nur spitze Winkel finden.
Das Problem wird hier für $d = 2$ angeführen, da dieses auch sehr schön grafisch nachvollziehbar ist.

Beweis 1 *Sein nun $d = 2$. Das heißt wir erhalten eine Menge mit $5 (= 2^d + 1)$ Punkten.*

Fall 1.) Diese Punkte bilden ein Fünfeck und darin lässt sich ein stumpfer Winkel finden. Fall 2.) Ein Punkt ist in der konvexen Hülle drei anderer Punkte enthalten. Diese bilden hierbei ein Dreieck. Der innenliegende Punkt sieht die Kanten unter drei Winkel, von denen einer mindestens 120 Grad ist, da die Winkelsumme insgesamt 360 Grad besitzt.

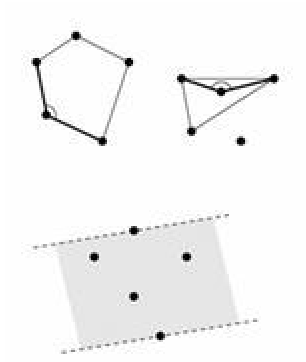

Abbildung 3: Fall 1 und Fall 2

3 Zwei Probleme auf einen Streich

Wie bereits erwähnt hat Paul Erdös um 1950 vermutet, dass jede Menge von mehr als 2^d Punkten im $\mathbb{R}^d$ einen stumpfen Winkel bestimmt, oder anders gesagt eine Teilmenge, die nur spitze Winkel enthält, besteht aus höchstens 2^d Punkten. Nur kurze Zeit später fragte sich Victor Klee, wie groß eine Punktmenge im $\mathbb{R}^d$ sein könnte, für die folgendes gilt:
1.) Für beliebige zwei Punkte der Menge gibt es immer einen Streifen, der durch zwei Hyperebenen begrenzt ist, der die Punktmenge enthält.
2.) Die beiden gewählten Punkte befinden sich auf verschiedenen Seiten des Randes.
Zwölf Jahre später kam eine gemeinsame Lösung für beide Probleme von Ludwig Danzer und Branko Grünbaum durch nachfolgende Kette von Ungleichungen, welche mit 2^d beginnt und auch endet.

3.1 Die Beweiskette

Satz 1 *Für jedes $d \geq 2$ gilt die folgende Kette von Ungleichungen:*

$$2^d \leq max \; \{\sharp S | S \subseteq \mathbb{R}^d, \sphericalangle(s_i, s_j, s_k) \leq \pi/2 \; \text{für alle} \; \{s_i, s_j, s_k\} \subseteq S\}$$

$$\leq max\{\sharp S | S \subseteq \mathbb{R}^d, sodass\ S\ f\ddot{u}r\ je\ zwei\ Punkte\ s_i, s_j \in S(i \neq j)\ in\ einem\ Streifen\ S(i,j)$$
$$liegt,\ dessen\ parallele\ Begrenzungshyperebenen\ s_i\ bzw.\ s_j\ enthalten\}$$

$$= max\{\sharp S | S \subseteq \mathbb{R}^d,\ sodass\ die\ Translate\ P{-}s_i\ von\ P := conv(S)\ einen\ Punkt\ gemeinsam\ haben,$$
$$sich\ dort\ aber\ nur\ ber\ddot{u}hren\ \}$$

$$\leq max\{\sharp S | S \subseteq \mathbb{R}^d, sodass\ die\ Translate\ Q{+}s_i\ eines\ d{-}dimensionalen\ konvexen\ Polytops$$
$$Q\ einander\ paarweise\ ber\ddot{u}hren\}$$

$$= max\{\sharp S | S \subseteq \mathbb{R}^d, sodass\ die\ Translate\ Q^*{+}s_i\ eines\ d{-}dimensionalen\ zentralsymmetrischen$$
$$konvexen\ Polytops\ Q^*\ einander\ paarweise\ ber\ddot{u}hren\}$$

$$\leq 2^d$$

Bevor ich nun zu den Beweisen der einzelnen Teile komme, müssen vorher noch weitere Begriffe definiert werden.

Definition 8 (konvexe Polytope) ***Konvexe Polytope*** *sind Polytope, bei denen die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten des Polytops wiederum komplett im Polytop enthalten ist.*

Definition 9 (Vektor) ***Ein Vektor*** *ist die Menge aller Pfeile, die gleich lang, parallel und gleich orientiert sind. Dieser kann arithmetisch als geordnetes Zahlenpaar ($\mathbb{R}^2$) bzw. Zahlentripel ($\mathbb{R}^3$) dargestellt werden:*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Definition 10 (Winkel zwischen Vektoren) ***Den Winkel zwischen zwei Vektoren*** *bezeichnet man als $ab = |a||b|cos(a,b)$ Dabei bezeichnen a und b zwei Vektoren. Mit cos(a,b)wird der Kosinus des von den beiden Vektoren eingeschlossenen Winkels bezeichnet.*

Definition 11 (Translation) *Wird eine Ebene derart verschoben, dass alle Punkte gerade, gleichlange, parallele und gleichorientierte Bahnen beschreiben, so heißt diese Abbildung eine **Translation**. Die Ergebnisse einer solchen Verschiebung werden als Translate bezeichnet.*

Definition 12 (Hyperebene) *Es sei V ein Vektorraum beliebiger Dimension über einem Körper K. Dann heißt ein echter Teilraum $U \leq V, U \neq V$ **lineare Hyperebene** in V, wenn eine der folgenden, gleichwertigen Bedingungen erfüllt ist:*
1. Es existiert ein Vektor $v_{\perp} = U^{\perp}$, so dass sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig schreiben lässt als $v = u + \lambda * v_{\perp}, u \in U, \lambda \in K$.
2. Jedes Erzeugendensystem von U lässt sich mit einem beliebigen Vektor $v \in V \setminus U$ zu einem Erzeugendensystem von V ergänzen.
3. Es existiert eine lineare Abbildung $f : V \to K$ (also ein lineares Funktional), so dass $f^{-}1(0) = U$ ist. [3]

Definition 13 (Halbraum) ***Ein Halbraum** ist eine durch eine Hyperebene begrenzte Teilmenge eines Raumes beliebiger Dimension. Wenn die Hyperebene selbst im Halbraum enthalten ist, heißt dieser abgeschlossen, sonst offen.*

3.2 Beweis der Kette

Die Beweise werden nach dem Buch "Das Buch der Beweise"[4] angeführt. Nur hin und wieder wird es kleine Abweichungen geben.

3.2.1 Bemerkung

Bevor nun aber die einzelnen Punkte der Kette bewiesen werden, möchte ich einige Notationen einführen, damit es nacher nicht zu Verwechslungen kommt. Als S bezeichnen wir eine Teilpunktmenge vom $\mathbb{R}^d$, eine conv(S) sei die konvexe Hülle von S und mit Q nennen wir die konvexen Polytope mit $\subseteq \mathbb{R}^d$. Konvexe Mengen berühren einander, wenn sie mindestens einen Randpunkt gemeinsam haben, sich aber im Inneren nicht schneiden. Und $s \in \mathbb{R}^d$ bezeichnet einen Vektor. Das Bild von Q unter der Verschiebung, die 0 nach s verschiebt wird als $Q + s$ geschrieben. Analog dazu wird die Verschiebung von s in den Nullpunkt mit $Q - s$ bezeichnet.

1.) Wir nehmen als S:= $\{0, 1\}^d$ die Eckenmenge des Einheitswürfels im $\mathbb{R}^d$ und wählen dazu Vektoren $s_i, s_j, s_k \in S$. Aus Symmetriegründen können wir $s_j = 0$ als Nullvektor annehmen. Also können wir den Winkel (siehe Formel oben) berechnen und dieser ist sicher nicht-negativ. Also ist S eine Menge mit |S|= 2^d, die keine stumpfen Winkel enthält.

2.) Wenn S keine stumpfen Winkel enthält, dann können wir für beliebige $s_i, s_j \in S$ parallele Hyperebenen $H_{i,j} + s_i$ und $H_{i,j} + s_j$ durch s_i bzw. s_j definieren, die senkrecht auf der Strecke $[s_i, s_j]$ stehen. Dabei bezeichnet $H_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, s_i - s_j \rangle = 0\}$ die Hyperebene durch den Ursprung, die auf der Geraden durch s_i und s_j senkrecht steht und $H + s_j = \{x + s_j : x \in H\}$ ist die zu H parallele Hyperebene, die durch s_j geht, usw. Also besteht der Streifen zwischen $H_{i,j} + s_j$ und $H_{i,j} + s_j$, außer s_i und s_j, genau aus all den Punkten $x \in \mathbb{R}^d$, für die die Winkel $\sphericalangle(s_i, s_j, x)$ und $\sphericalangle(s_j, s_i, x)$ nicht stumpf sind. Damit erhält der Streifen die ganze Menge S.

3.) P ist in dem Halbraum bzgl. $H_{i,j} + s_j$, der s_i enthält, dann und nur dann enthalten, wenn $P - s_j$ in dem Halbraum von $H_{i,j}$ enthalten ist, der $s_i - s_j$ enthält: Eine Eigenschaft " ein Objekt ist in einem Halbraum enthalten" wird nicht zerstört, wenn wir sowohl das Objekt als auch den Halbraum um denselben Vektor (nämlich um $-s_j$) verschieben. Genauso ist P in dem Halbraum von $H_{i,j} + s_i$, der s_j enthält, dann und nur dann enthalten, wenn $P - s_i$ in dem Halbraum von $H_{i,j}$ enthalten ist, der $s_j - s_i$ enthält. Die Kombination der beiden Aussagen liefert nun, dass das Polytop P in dem Streifen zwischen $H_{i,j} + s_i$ und $H_{i,j} + s_j$ genau dann enthalten ist, wenn $P - s_i$ und $P - s_j$ in verschiedenen Halbräumen bzgl. der Hyperebene $H_{i,j}$ liegen. Zusätzlich liefert uns $s_i \in P = conv(S)$, dass der Ursprung 0 in allen Translaten $P - s_i$ enthalten ist. Also schneiden sich die Mengen $P - s_i$ alle in 0, aber sie berühren einander nur: sie können keine inneren Punkte gemeinsam haben, weil sie auf unterschiedlichen Seiten der entsprechenden Hyperebenen $H_{i,j}$ liegen.

4.) Dies kriegen wir umsonst: Die Aussage " die Translate müssen einander paarweise berühren" ist schwächer als "sie schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt, aber berühren einander nur". Genauso schwächen wir eine Bedingung ab, wenn wir für P ein beliebiges konvexes d-Polytop im $\mathbb{R}^d$ zulassen. Schließlich können wir auch S durch $-S$ ersetzen.

5.) Hier ist "$\leq$"trivial, aber das ist nicht die Richtung, die uns wirklich interessiert. Unser Ausgangspunkt ist eine Konfiguration $S \subseteq \mathbb{R}^d$ und ein beliebiges d-Polytop $Q \subseteq \mathbb{R}^d$, sodass die Translate $Q + s_i (s_i \in S)$ einander paarweise berühren. Die Behauptung ist, dass wir in dieser Situation $Q^* := \{1/2(x-y) \in \mathbb{R}^d : x, y \in Q\}$ anstelle von Q verwenden können. Aber dies ist nicht schwer zu sehen: Erstens ist Q^* d-dimensional, konvex und zentralsymmetrisch. Man kann auch zeigen, dass Q^* ein Polytop ist (mit Ecken von der Form $\frac{1}{2}(q_i - q_j)$, für Ecken q_i, q_j von Q), aber das kann für diesen Beweis vernachlässigt werden. Als Nächstes überlegen wir uns, dass $Q + s_i$ und $Q + s_j$ einander dann und nur dann berühren, wenn dasselbe für $Q^* + s_i$ und $Q^* + s_j$ zutrifft. Dafür wandeln wir sozusagen auf den Spuren von Minkowski, indem wir die folgenden Äquivalenzen nachweisen:

$$(Q^* + s_i) \cap (Q^* + s_j) \neq \varnothing$$

$$\Leftrightarrow \exists q_i', q_i'', q_j', q_j'' \in Q : \frac{1}{2}(q_i' - q_i'') + s_i = \frac{1}{2}(q_j' - q_j'') + s_j$$
$$\Leftrightarrow \exists q_i', q_i'', q_j', q_j'' \in Q : \frac{1}{2}(q_i' + q_j'') + s_i = \frac{1}{2}(q_j' + q_i'') + s_j$$
$$\Leftrightarrow \exists q_i, q_j \in Q : q_i + s_i = q_j + s_j$$
$$\Leftrightarrow (Q + s_i) \cap (Q + s_j) \neq \varnothing$$

Dabei verwenden wir für die dritte (und entscheidende) Äquivalenz " $\Leftrightarrow$ ", dass jedes $q \in Q$ als $q = \frac{1}{2}(q + q)$ geschrieben werden kann, was " $\Leftarrow$ " liefert, und dass wegen der Konvexität von Q die beiden Punkte $\frac{1}{2}(q_i' + q_j'')$ und $\frac{1}{2}(q_j' + q_j'')$ in Q liegen, woraus " $\Rightarrow$ " folgt.
Damit erhält also der Übergang von Q auf Q^* die Eigenschaft, dass sich zwei Translate $Q + s_i$ und $Q + s_j$ schneiden. Damit haben wir gezeigt, dass sich für eine beliebige konvexe Menge Q zwei Translate $Q + s_i$ und $Q + s_j$ dann und nur dann schneiden, wenn sich die Translate $Q^* + s_i$ und $Q^* + s_j$ schneiden. Die folgenden Charakterisierung zeigt nun, dass die Symmetrisierung auch die Eigenschaft erhält, dass zwei Translate einander berühren:
$Q + s_i$ und $Q + s_j$ berühren einander dann und nur dann, wenn sie sich schneiden, aber $Q + s_i$ und $Q + s_j + \varepsilon(s_j - s_i)$ für jedes $\varepsilon > 0$ disjunkt sind.

6.) Nehmen wir nun an, dass $Q^* + s_j$ und $Q^* + s_i$ einander berühren. Für einen beliebigen Schnittpunkt

$$x \in (Q^* + s_i) \cap (Q^* + s_j)$$

haben wir dann

$$x - s_i \in Q^* \textit{ und } x - s_j \in Q^*,$$

und damit, da Q^* zentralsymmetrisch ist,

$$s_i - x = -(x - s_i) \in Q^*$$

und schließlich, weil Q^* konvex ist,

$$\frac{1}{2}(s_i - s_j) = \frac{1}{2}((x - s_j) + (s_i - x)) \in Q^*$$

Daraus schließen wir, dass $\frac{1}{2}(s_i + s_j)$ für alle i in $Q^* + s_j$ enthalten ist. Für $P := conv(S)$ liefert dies

$$P_j := \frac{1}{2}(P + s_j) = conv\{\frac{1}{2}(s_i + s_j) : s_i \in S\} \subseteq Q^* + s_j,$$

woraus folgt, dass die Mengen $P_j = \frac{1}{2}(P + s_j)$ einander nur berühren können. Die Mengen P_j sind aber alle in P enthalten, denn alle Punkte s_i, s_j und $\frac{1}{2}(s_i + s_j)$ sind in

P enthalten, weil P konvex ist. Aber die P_j's sind nur verkleinerte Translate von P, die in P enthalten sind. Der Verkleinerungsfaktor ist $\frac{1}{2}$, woraus

$$vol(P) = \frac{1}{2^d} vol(P)$$

folgt, weil wir es mit d-dimensionalen Mengen zu tun haben. Dies bedeutet, dass höchstens 2^d Mengen P_j in P hineinpassen, und damit $|S| \leq 2^d$. Dies beendet unseren Beweis: die Ungleichungskette ist geschlossen.

$\square$

4 Erweiterung auf Mengen, die nur spitze Winkel enthalten

Aber wie es in der Wissenschaft oft ist, reichte diese Errungenschaft den Mathematikern noch nicht und es waren Danzer und Branko, die sich die Frage stellten was passiert, wenn man fordert, dass alle vorkommenden Winkel spitz sein müssen. Danzer und Grünbaum haben als erste Vermutung eine Konfiguration von $2*d-1$ Punkten im $\mathbb{R}^d$ aufgestellt, für die nur spitze Winkel auftreten. Grünbaum brachte auch den Beweis der Gültigkeit für $d \leq 3$. Jedoch war diese Vermutung für große Dimensionen sehr falsch. Nach einigen Versuchen eine solche Menge zu finden, schafften es jedoch erst Paul Erdös und Zoltan Füredi einen gültigen Beweis aufzustellen. Dieser hat es wohl auf Grund seiner Eleganz in das Buch "Das Buch der Beweise geschafft". Bei diesem Beweis bedient man sich zusätzlich sehr geschickt an Hilfsmitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Beweisführung folgt wiederum analog zu dem Buch der Beweise.

Satz 2 *Für jedes $d \geq 2$ gibt es eine Menge S von $2\lfloor \frac{\sqrt{6}}{9}(\frac{2}{\sqrt{3}})^d \rfloor$ Punkten in $\{0,1\}^d$ (Ecken des d-dimensionalen Einheitswürfels), in der nur spitze Winkel auftreten. Insbesondere gibt es in Dimension $d = 34$ eine Menge von $72 > 2*34-1$ Punkten mit nur spitzen Winkeln.*

Um den folgenden Beweis besser nachvollziehen zu können, werden zuvor wichtige Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung angeführt.

Definition 14 (Zufallsvariable) *Sei Ω eine endliche Menge und p=Prob ist eine Abbildung von Ω in das Intervall $|0,1|$ mit $\sum_{w\in\Omega} p(w) = 1$.* ***Eine Zufallsvariable*** *X auf Ω ist nun eine Abblildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$.*

Definition 15 (Wahrscheinlichkeitraum) *Als* ***Wahrscheinlichkeitsraum*** *definieren wir auf der Bildmenge $X(\Omega)$, indem wir $p(X = x) := \sum_{X(w)=x} p(w)$ setzen.*

Definition 16 (Erwartungswert) ***Der Erwartungswert*** *EX von X bezeichnet den erwarteten Mittelwert, also $EX = \sum_{w \in \Omega} p(w)X(w)$.*

Bemerkung: Den Nachweis für die Linearität des Erwartungswerts lasse ich hier aus. Man kann jedoch zeigen, dass $E(X+Y) = EX + EY$ gilt und dies auf eine endliche Linearkombination von Zufallsvariablen zeigen.

Bemerkung: Ein weiteres Hilfsmittel des folgenden Satzes möchte ich auch als Bemerkung anführen, die Markov-Ungleichung:

$$Prob(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

4.1 Beweis von Satz 2

Wir setzen $m := \lfloor \frac{\sqrt{6}}{9} (\frac{2}{\sqrt{3}})^d \rfloor$ und wählen $3m$ Vektoren

$$x(1), x(2), ..., x(3m) \in \{0,1\}^d,$$

indem wir alle Koordinaten unabhängig und zufällig auf 0 oder 1 setzen, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für jede Alternative. (Man könnte eine perfekte Münze $3md - Mal$ dafür werfen; aber für großes d wird dies sehr schnell langweilig.)
Nun bestimmen drei Vektoren $x(i), x(j), x(k)$ genau dann einen rechten Winkel mit Spitze $x(j)$, wenn das Skalarprodukt $\langle x(i) - x(j), x(k) - x(j) \rangle$ verschwindet. Das heißt, wenn $x(i)_l - x(j)_l = 0$ oder $x(k)_l - x(j)_l = 0$ für jede Koordinate l gilt. Wir nennen (i,j,k) ein schlechtes Tripel wenn dies passiert. (Wenn $x(i) = x(j)$ oder $x(j) = x(k)$ ist, dann ist der Winkel nicht definiert, aber dann ist das Tripel ganz sicher schlecht.)
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein ganzes bestimmtes Tripel schlecht ist, ist genau $(\frac{3}{4})^d$: Es ist nämlich genau dann gut, wenn für mindestens eine der d Koordinaten l

$$\begin{aligned} \text{entweder } & x(i)_l = x(k)_l = 0, x(j)_l = 1 \\ \text{oder } & x(i)_l = x(k)_l = 1, x(j)_l = 0 \end{aligned}$$

gilt. Damit haben wir sechs schlechte Möglichkeiten von insgesamt acht gleich wahrscheinlichen, und ein Tripel ist dann schlecht, wenn für jede der d Koordinaten eine schlechte Möglichkeit (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$) eintritt.
Die Anzahl der Tripel, über die wir uns Sorgen machen müssen, ist $3 * \binom{3m}{3}$, weil es insgesamt $\binom{3m}{3}$ Mengen von drei Vektoren gibt, und dann jeweils drei Möglichkeiten die Spitze auszuwählen. Die Wahrscheinlichkeiten, dass verschiedene Tripel gut oder schlecht sind, sind natürlich nicht unabhängig voneinander: aber die Linearität des Erwartungswerts (die wir durch Mittelwertbildung über alle möglichen Auswahlen bekommen liefert,

dass die erwartete Anzahl der schlechten Tripel genau $3 * \binom{3m}{m} * (\frac{3}{4})^d$ ist. Dies bedeutet (probabilistische Methode), dass es mindestens eine Möglichkeit gibt, die $3m$ Vektoren auszuwählen, sodass es höchstens $3 * \binom{3m}{m} * (\frac{3}{4})^d$ schlechte Tripel gibt, wobei

$$3 * \binom{3m}{m} * (\frac{3}{4})^d < 3 * \frac{(3m)^3}{6} * (\frac{3}{4})^d = m^3 * (\frac{9}{\sqrt{6}})^2 * (\frac{3}{4})^d \leq m$$

gilt, weil wir m genau für diesen Zweck richtig gewählt haben.
Aber wenn es nicht mehr als m schlechte Tripel gibt, dass können wir m der $3m$ Vektoren $x(i)$ weglassen, so dass die übrig bleibenden $2m$ Vektoren kein schlechtes Tripel enthalten, also nur spitze Winkel bestimmen.

$\square$

5 Literaturverzeichnis

Literatur

[1] Martin Aigner. “Die pure Eleganz der Mathematik”. In: *π und Co.* Springer, 2008, S. 15–19.

[2] Im Februar. “Mathe-Tricks in der Biologie”. In: *Entdecker gesucht* ().

[3] Bento Gonçalves RS Fundaparque. “Rüdeger Baumann Fuchsgarten 3 30823 Garbsen E-Mail: baumann-garbsen@ t-online. de”. In: *vermissen Sie ein Themenheft von LOG IN?* (), S. 78.

[4] Günter M Ziegler und Martin Aigner. “Stumpfe Winkel”. In: *Das BUCH der Beweise.* Springer, 2010, S. 103–109.