# Drei Anwendungen der Eulerschen Polyederformel

Seminar aus Reiner Mathematik

Viktoria Weißensteiner

04. Dezember 2013

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

Diese Seminararbeit ist im Rahmen des Seminars aus Reiner Mathematik entstanden.
Inhaltlich beschäftigt sich die Seminarbeit mit der Eulerschen Polyederformel und deren Anwendungen in anderen Gebieten der Graphentheorie. Wichtig ist vor allem der Begriff des planaren Graphen, denn dieser steht in der gesamten Seminararbeit im Vordergrund, denn genau für solche Graphen ist die Eulersche Polyederformel gültig.

Inhaltlich ist die Seminararbeit so gegliedert, dass man zuerst einen kurzen Überblick über die wichtigsten Begriffe der Graphentheorie bekommt. Danach gibt es eine kurze Erklärung der Eulerschen Polyederformel und einen ganz einfach Beweis und zum Abschluss folgen einige Sätze, welche eine Folgerung der Eulerschen Formel sind.

Als inhaltliche Grundlage dienten das Kapitel 12 aus dem Buch "Proofs from the Book"von Martin Aigner und Günter M. Ziegler und für die graphentheoretischen Voraussetzungen das Buch "Graphentheorie"von R. Diestel.

# Kapitel 2

# Vorbereitende Theorie

## 2.1 ebene Graphen

**Definition 2.1.** *Seien $p$ und $q$ verschiedene Punkte der Ebene. Man definiert eine Strecke in der euklidschen Ebene $\mathbb{R}^2$ als eine Punktmenge $\{p + \lambda(q - p) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ mit Endpunkten $p$, $q$ und $p \neq q$.*

**Definition 2.2.** *Eine Vereinigung $P$ von endliche vielen Strecken, welche zum Einheitsintervall $[0, 1]$ homöomorph ist, nennt man einen Polygonzug. Die Endpunkte sind die Bilder von 0 und 1 unter einem entsprechenden Homöomorphismus. Die Inneren Punkte eines Polgonzuges sind alle seine Punkte ohne die Endpunkte.*

**Definition 2.3.** *Ein ebener Graph ist ein Paar $(V, E)$ endlicher Mengen (Die Elemente von $V$ nennt man die Ecken oder Knoten des Graphen und die Elemente von $E$ nennt man die Kanten.), welcher folgende Eigenschaften erfüllt:*

1. *$V \subseteq \mathbb{R}^2$*
2. *jede Kante ist ein Polygonzug zwischen zwei Ecken*
3. *zwei verschiedene Kanten haben verschiedene Mengen von Endpunkten*
4. *das Innere einer Kante enthält keine Ecke und keinen Punkt einer anderen Kante*

**Definition 2.4.** *Ein Graph heißt planar, wenn er in die Ebene einbettbar ist, dass heißt, wenn er isomorph zu einem ebenen Graphen ist. $G$ heißt maximal planar, wenn $G$ planar ist, aber für jede weitere Kante $e$ gilt, dass $G+e$ nicht mehr planar ist.*

*Bemerkung:* Bei einem ebenen Graph schneiden sich die Kanten nie und sie berühren sich nur in den Endpunkten, bei einem planaren Graphen können sich zwei Kanten schneiden, doch es muss möglich sein, den Graphen so zu zeichnen, dass sich die Kanten im $\mathbb{R}^2$ nicht mehr schneiden.

**Definition 2.5.** *Ein Weg ist ein Graph $P = (V, E)$ , mit $V = (x_0, \dots, x_k)$ und $E = (x_0x_1, \dots, x_{k-1}x_k)$, $x_i \neq x_j$ $x_0$ und $x_k$ sind die Endecken von P und alle weiteren Punkte sind die inneren Ecken von P. $x_0$ und $x_k$ sind durch P verbunden.*

**Definition 2.6.** *Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei seiner Ecken x, y einen Weg x-y gibt, das heißt, wenn es zu je zwei Ecken eine Kante gibt.*

**Definition 2.7.** *Man nennt zwei Ecken x, y von G benachbart in G, wenn der Weg xy in G ist. Zwei verschiedene Kanten e, f sind benachbart, wenn sie in die selbe Endecken münden.*
*G heißt vollständig, wenn je zwei Ecken in G Nachbarn sind. Einen vollständigen Graphen mit n Ecken bezeichnet man mit $K^n$*

*Bemerkung:* Zwei Ecken sind benachbart, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.

*Beispiel* : Ein Dreieck ist ein vollständiger Graph $K^3$, er besitzt 3 Ecken und alle Ecken sind miteinander durch eine Kante verbunden.

**Definition 2.8.** *Zwei ebene zusammenhängende Graphen $G = (V, E)$ und $G^\star = (V^\star, E^\star)$ nennt man zueinander dual, wenn es eine Bijektion zwischen der Flächen- und der Knotenmenge, sowie zwischen den Kantenmengen gibt.*

**Definition 2.9.** *Ein Graph heißt einfach, wenn er keine Schleifen ( Kanten die den selben Anfangs- und Endpunkt haben) und keine Mehrfachkanten(parallele Kanten) hat.*

## 2.2 Bäume und Wälder

**Definition 2.10.** *Sei $P = (x_0, \dots, x_k)$ ein Weg mit $k \geq 2$. Ein Kreis ist ein Graph $K := P + x_kx_0$ mit einer zyklischen Eckenfolge.*

*Bemerkung:* Jeder Graph enthält einen Weg der Länge $\delta(G)$ (wobei die Länge eines Weges die Anzahl seiner Kanten ist und $\delta(G)$ ist die kleinste Länge eines Weges in G)und einen Kreis der Länge mindestens $\delta(G) + 1$, mit $\delta(G) \geq 2$

**Definition 2.11.** *Enthält ein Graph keinen Kreis, so wird er als Wald bezeichnet. Ein Wald der zusammenhängend ist, nennt man einen Baum.*

*Bemerkung:* Die einzelnen Komponenten eines Waldes sind Bäume.

**Satz 2.1.** *$T$ sei ein Graph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$T$ ist ein Baum*
2. *in $T$ haben je zwei Ecken genau einen Weg*
3. *$T$ ist minimal zusammenhängend, d.h. $T$ ist zusammenhängend aber für jede Kante $e$ aus $T$ ist $T - e$ nicht zusammenhängend*
4. *$T$ ist maximal kreislos, dh. $T$ ist kreislos aber für zwei nicht benachbarte Ecken $x$, $y$ enthält $T + xy$ einen Kreis.*

**Definition 2.12.** *Ein Baum $T \subseteq G$ heißt Spannbaum von $G$, wenn gilt $V(T) = V(G)$, d.h. wenn er ganz $G$ aufspannt. Ein Spannbaum ist nach Satz 2.1 ein Graph der minimal zusammenhängend und maximal kreislos ist. Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen Spannbaum.*

## 2.3 Bipartite Graphen

**Definition 2.13.** *Sei $r \geq 2, r \in \mathbb{N}$. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt $r$-partit, wenn es eine Zerlegung (Partition) in $r$ Teile gibt, sodass die beiden Ecken von jeder Kante in $G$ in verschiedenen Partitionsklassen liegen, d.h Ecken in der selben Klasse dürfen nicht durch eine Kante verbunden sein, also sie dürfen nicht benachbart sein. Ein 2-partiter Graph wird auch bipartit genannt.*

**Definition 2.14.** *Sei $G$ ein $r$-partiter Graph. Man nennt $G$ vollständig, wenn je zwei Ecken aus verschiedenen Partitionsklassen benachbart sind. Sind $n_1, n_2 \ldots, n_r$ die Mächtigkeiten der einzelnen Partitionsklassen so bezeichnet man einen vollständig $r$-partiten Graphen mit $K_{n_1,\ldots,n_r}$*

## 2.4 Polyeder

**Definition 2.15.** *Ein dreidimensionaler Polyeder ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, welche durch ebene Flächen (Vielecken) begrenzt wird. Ein Polyeder ist regulär, wenn alle seine Flächen von dem gleichen regelmäßigen Vieleck gebildet werden und in jeder Ecke die Anzahl der zusammenstoßenden Vielecke gleich ist.*

**Definition 2.16.** *Eine Teilmenge des euklidschen Raumes heißt konvex, wenn mit zwei beliebigen Punkten aus einer Menge auch ihre Verbindungsstrecke in der Menge liegt.*

*Bemerkung:* Ein reguläres Polyeder wird auch platonischer Körper genannt. Es gibt genau 5 platonische Körper und jeder dieser Körper erfüllt folgende Eigenschaften:

1. sie sind konvex
2. alle Kanten haben die selbe Länge
3. die Flächen sind zueinander konkruent
4. jede Ecke hat den gleichen Abstand zum Mittelpunkt
5. sie haben eine Um-, In- und Kantenkugel

Die fünf platonischen Körper sind Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder

# Kapitel 3

# Die Eulersche Polyederformel

Gegeben sei ein ebener Graph.
Die Zeichnung eines solchen Graphen zerlegt die Ebene (bzw. äquivalent dazu, die 2-dimensionale Sphäre) in eine endliche Anzahl an verbundenen Bereichen, diese beinhalten auch die äußeren Bereiche, die auch als Flächen bezeichnet werden.

**Die Eulersche Polyederformel legt nun den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen in einen ebenen Graphen dar.**

Euler erwähnte dieses Resultat das erste Mal in einem Brief an seinen Freund Goldbach 1750, jedoch hatte er zu dieser Zeit noch keinen vollständigen Beweis dafür. Mittlerweile existieren 19 Beweise für die Eulersche Polyederformel. Der folgende Beweis geht zurück auf Staudt's Buch "Geometrie der Lage"von 1874:

**Satz 3.1** (Euler's Formel)**.** *Sei $G$ ein zusammenhängender ebener Graph mit $n$ Eckpunkten, $e$ Kanten und $f$ Flächen, dann gilt:*

$$n - e + f = 2$$

*Beweis.* Sei $T \subseteq E$ die Menge der Kanten eines Spannbaumes von $G$. Ein Spannbaum ist ein minimaler Teilgraph der alle Ecken von $G$ verbindet und keine Kreise enthält. Man benötigt nun den dualen Graph $G^*$ von $G$.
Zur Konstruktion des dualen Graphen setzen wir in jede Fläche $f$ von $G$ einen

Eckpunkt $n^*$ von $G^*$. (Wichtig ist hier, dass bei einem ebenen Graphen auch das Äußere als Fläche zählt.) Weiters muss man zu jeder Kante $e$ eine duale Kante $e^*$ bilden, indem man die Ecken $n^*$ der beiden angrenzenden Flächen verbindet. Nun betrachtet man die Kantenmenge $T^* \subseteq E^*$ im dualen Graphen, welche der Kantenmenge $E \setminus T$ entsprechen, das sind genau die Kanten $e^*$ welche nicht die Kanten des Spannbaumes von $G$ schneiden. Die Kanten in $T^*$ verbinden alle Flächen, weil $T$ kreislos ist. $T^*$ selbst ist aber auch kreislos, den ansonsten würde durch den Kreis eine Ecke von $G$ von den anderen Ecken in $G$ getrennt. (Das ist aber unmöglich, weil $T$ ein Spannbaum von $G$ ist und sich die Ecken von $T$ und $T^*$ sonst überschneiden würden.). Daraus folgt, dass $T^*$ ein Spannbaum von $G^*$ ist. Für jeden Spannbaum gilt, dass die Anzahl der Kanten um eins geringer ist als die Anzahl der Ecken.
Um das zu zeigen wählt man eine Ecke als Nullpunkt und verbindet ausgehend von diesem Nullpunkt jede Ecke mit einer Kante. Nun hat man eine Bijektion zwischen allen Ecken ausgenommen dem Nullpunkt und den dazugehörigen Kanten.
Bezüglich des Spannbaumes $T$ bedeutet das, das für die Anzahl der Ecken gilt: $n = e_T + 1$ Da die Anzahl der Ecken in $T^*$ gleich ist der Anzahl der Flächen in $T$, gilt für den Spannbaum $T^*$: $f = e_{T*} + 1$
Fügt man nun beide Gleichungen zusammen, ergibt sich folgendes:

$$n + f = (e_T + 1) + (e_{T*} + 1) = e + 2$$

□

# Kapitel 4

# Drei Anwendungen der Eulerschen Polyederformel

Mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel kann man eine geometrische Situation zahlenmäßig beschreiben. Immer wenn ein Graph in der Ebene oder auf der Sphäre gezeichnet werden kann, gilt dass die Anzahl der Ecken n, Kanten e und Flächen f folgender Formel genügt:

$$n - e + f = 2$$

Weiters können einige sehr bekannte, klassische Konsequenzen mit der Euler Formel hergeleitet werden. Darunter die Einteilung der regulären, konvexen Polyeder, d.h. der platonischen Körper, außerdem kann gezeigt werden, dass $K_5$ und $K_{3,3}$ nicht planar sind und das Fünf-Farben Theorem, das zeigt, dass jede planare Karte mit höchstens fünf Farben so bemalt werden kann, dass zwei angrenzende Länder nie die selbe Farbe haben.
Weiters werden wir drei weitere interessante Sätze sehen, welche mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel bewiesen werden können. Die ersten beiden sind ein Beweis des Satzes von Sylvester-Gallai und ein Satz über zwei−färbung bei einfachen ebenen Graphen. Beide benützen den Satz von Euler und andere arithmetische Beziehungen zwischen den wesentlichen Parametern der Graphen.
Als erstes müssen wir diese Parameter betrachten.

## 4.1 Vorbereitung:

**Definition 4.1.** *Der Grad einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die in der Ecke beginnen bzw. enden. Hierbei zählen Schleifen (das sind Kanten die in einer Ecke beginnen und in der selben Ecke enden) doppelt.*

Man bezeichnet nun mit $n_i$ die Anzahl der Ecken mit Grad i in $G$. Die Summe der Ecken ergibt sich nun indem man die Anzahl der Ecken mit verschiedenen Grad addiert:

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots \tag{4.1}$$

*Bemerkung:* Eine Ecke vom Grad 0 nennt man isoliert, d. h. diese Ecke ist mit keiner weiteren verbunden.
Weiters kann man feststellen, dass jede Kante zwei Enden hat und deshalb muss jede Kante 2 zum Grad der Ecken beitragen. Daraus erhalten wir folgendes:

$$\begin{aligned} 2e &= 0n_0 + 1n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots \\ 2e &= n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots \end{aligned} \tag{4.2}$$

Das heißt der Grad von ganz $G$, also die Summe der Grade der einzelnen Ecken von $G$, ist gleich 2 mal die Anzahl der Kanten.
Da man nun die Anzahl der Ecken und den vollständigen Grad von $G$ kennt, kann man sich nun den durchschnittlichen Grad $\overline{d}$ jeder Ecke berechnen:

$$\overline{d} = \frac{2e}{n}$$

Als nächstes zählt man die Flächen eines ebenen Graphen, entsprechend der Anzahl ihrer Seiten: eine $k$-Fläche ist eine Fläche an der $k$ Kanten anliegen.(Jede Kante, die an zwei Regionen grenzt, muss natürlich zweimal gezählt werden.) Man bezeichnet nun die Anzahl der $k$-Flächen mit $f_k$. Zählen wir nun die Anzahl der Flächen $f$ in $G$, so brauchen wir nur die Summe der $f_k$ zu bilden:

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots \tag{4.3}$$

Weiters zählt man die Kanten, bezogen auf die Flächen an denen sie anliegen und daraus folgt:

$$2e = f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \dots \tag{4.4}$$

Das ergibt sich aus der Tatsache, dass jede Kante an zwei Flächen grenzt und jede $k$-Fläche durch $k$ Kanten begrenzt wird.
Nun können wir wiederum das durchschnittliche Verhältnis der Seiten pro Fläche $\overline{f}$ berechnen:

$$\overline{f} = \frac{2e}{f}$$

*Bemerkung:* Die Gleichungen 4.3, 4.4 und 4.1, 4.2 sind sich sehr ähnlich, das ist kein Zufall. Man kann ganz einfach die Gleichungen ineinander überführen, indem man zu dem dualen Graphen übergeht.

## 4.2 Erste Anwendungen der Polyederformel

Mit Hilfe der Vorbereitung und der Eulerschen Polyederformel kann man nun schnell zeigen, dass der volständige Graph $K_5$ und der vollständig, bipartite Graph $K_{3,3}$ nicht planar sind.

*Beweis: z.z. $K_5$ ist nicht planar.* Dazu nimmt man an der Graph sei planar. Wir wissen $n = 5$ und da der Graph vollständig ist, ist die Anzahl der Ecken $e = \binom{5}{2} = 10$, daraus und aufgrund der Annahme folgt $f = e - n + 2 = 7$ und $\overline{f} = \frac{2e}{f} = \frac{20}{7} < 3$, d.h. dass die durchschnittliche Anzahl der Seiten, die an die Flächen angrenzen kleiner als drei ist. Es gäbe also mindestens eine Fläche, die nur durch zwei Seiten begrenzt wird, was nicht möglich ist. Das ist ein Widerspruch und deshalb ist $K_5$ nicht planar. □

*Beweis: z.z. $K_{3,3}$ ist nicht planar.* Wir nehmen wieder an der Graph sei planar. Mit $n = 6$ , $e = 9$ folgt, dass $f = e - n + 2 = 5$ und $\overline{f} = \frac{2e}{f} = \frac{18}{5} < 4$, dass kann aber nicht sein, weil $K_{3,3}$ ein einfacher, bipartiter Graph ist und jeder seiner Kreise eine Länge von mindestens vier hat. □

Ausgehend von den Gleichungen 4.4 und 4.3 kann man nun weiter Konsequenzen zeigen, die aus der Eulerschen Formel folgen.

**Satz 4.1.** *Sei $G$ ein einfacher ebener Graph mit $n > 2$ Ecken. Dann gilt:*

*a) $G$ hat maximal $3n - 6$ Kanten*

*b) $G$ hat eine Ecke mit maximalen Grad 5*

*c) Sind die Kanten von $G$ zwei-gefärbt, dann existiert eine Ecke in $G$, sodass die Kanten dieser Ecke höchstens zweimal die Farbe wechseln, wenn man sie im Kreis herum betrachtet.*

*Beweis:* Wir setzen voraus, dass $G$ zusammenhängend ist.

**a)** Jede Fläche hat mindestens 3 Kanten (vorausgesetzt $G$ ist einfach) und mit Hilfe von Gleichung 4.3 und 4.4 folgt daraus:

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + \dots$$

und weiters

$$2e = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots$$

und daraus folgt:

$$2e - 3f = (3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots) - (3f_3 + 3f_4 + 3f_5 + \dots) \geq 0$$

Euler's Formel führt nun zu folgendem:

$$\begin{aligned} n + f - e &= 2 \\ 3n + 3f - 3e &= 6 \\ 3n - 6 = 3e - 3f &= e + 2e - 3f \end{aligned}$$

mit $2e - 3f \geq 0$ folgt:

$$3n - 6 \geq e$$

**b)** Mit Punkt a) folgt für den durchschnittlichen Grad $\overline{d}$ :

$$\overline{d} = \frac{2e}{n} \leq \frac{6n-12}{n} < 6$$

Daraus folgt, dass es eine Ecke gibt, die höchstens einen Grad von 5 hat.

**c)** Sei c die Anzahl der Farbwechsel im gesamten Graphen. Angenommen die Aussage sei falsch, also es gibt keine Ecke mit höchstens zwei Farbwechseln.
Da die Anzahl der Wechsel an jeder Ecke immer gerade ist, gibt es nun $c \geq 4n$ Farbwechsel im gesamten Graphen.
Nun betrachtet man die Fläche des Graphen. Hat eine Fläche $2k$ oder $2k+1$ Kanten, so hat sie in beiden Fällen maximal $2k$ Farbwechsel und daraus folgt unter Verwendung der Gleichungen 4.3 und 4.4:

$$\begin{aligned}
4n \leq c &\leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + 8f_8 + \ldots \\
&\leq 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 + 10f_7 + \ldots \\
&= 2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \ldots) - 4(f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + \ldots) \\
&= 4e - 4f
\end{aligned}$$

Das heißt nun es würde gelten $e \geq n+f$, was aber ein Widerspruch zu Euler's Formel wäre. □

*Bemerkung:*Ein Beispiel für die Anwendung von Graphfärbung wäre das Stundenplanproblem. Die Ecken des Graphen sind dabei die verschiedenen Unterrichtsgegenstände und eine Kante wird zwischen zwei Veranstaltungen eingefügt, die nicht gleichzeitig stattfinden können. In der Schule wären das z. B. Stunden, die von demselben Lehrer unterrichtet werden sowie Stunden in derselben Klasse. Die möglichen Farben entsprechen den zuteilbaren Zeitfenstern.

## 4.3 Drei Anwendungen der Eulerschen Polyederformel

### 4.3.1 Satz von Sylvester Galai

Dieser Satz wurde zum ersten Mal von Norman Steenrod erwähnt. Teil b) des vorigen Satzes führt zu einem ganz einfachen Beweis des Satzes von Sylvester Galai. Hier wollen wir den Beweis mit Hilfe der Eulerschen Formel führen:

**Satz 4.2.** *Gegeben sei eine Menge von $n \geq 3$ Punkten in der Ebene, die sich nicht alle auf einer Geraden befinden. Dann gibt es immer eine Linie, die genau zwei der Punkte enthält.*

*Beweis.* Bettet man die Ebene $\mathbb{R}^2$ in den Raum $\mathbb{R}^3$, genauer in die Einheitskugel, dann entspricht jeder Punkt der Ebene genau zwei entgegengesetzten Punkten auf der Kugel und jede Gerade der Ebene entspricht einem Großkreis auf der Kugel. Damit führt der Satz von Sylvester Galai zu folgendem:

*Gegeben sei eine Menge von $n \geq 3$ Paaren entgegengesetzter Punkte auf der Kugel, wobei nicht alle Paare von entgegengesetzten Punkten auf dem selben Großkreis liegen, dann gibt es immer einen Großkreis auf dem genau zwei Paare von entgegengesetzten Punkte liegen.*

Ersetzt man nun jedes Paar entgegengesetzter Punkte auf der Kugel durch den Großkreis auf dem sie liegen, so gibt es die Möglichkeit anstatt der Punkte $\pm v \in S^2$ den orthogonalen Kreis $C_v = \{x \in S^2 :< x, v >= 0\}$ zu betrachten. (Betrachten man v als den Nordpol der Kugel so ist $C_v$ der Äquator.) Betrachtet man die orthogonalen Kreise, so ist nun der Schnittpunkt der Kreise die Gerade auf der die Punkte vorher waren. Die Anzahl der Punkte auf der Geraden wird durch die Anzahl der Großkreise gegeben, die durch den Schnittpunkt gehen. Nun muss man für den Satz von Sylvester Galai folgendes Beweisen:

*Gegeben sei eine Menge von $n \geq 3$ Großkreisen auf der Kugel $S^2$ und diese Großkreise gehen nicht alle durch den selben Punkt, dann gibt es immer einen Punkt der genau durch zwei Großkreise geht.*

Diese Anordung der Großkreise liefert einen einfachen, ebenen Graphen auf $S^2$, dessen Ecken die Schnittpunkte von zwei Großkreisen sind. Die Schnittpunkte teilen die Großkreise in Kanten. Der Grad jeder Ecke ist gerade und mindestens 4, was sich durch die Konstruktion ergibt. Teil b) von Satz 4.1 besagt, dass es eine Ecke mit Grad $\leq 5$ gibt. Diese zwei Aussagen führen nun dazu, dass es eine Ecke mit Grad 4 gibt und daher wissen wir nun, dass sich in diesem Punkt genau zwei Großkreise schneiden. $\square$

### 4.3.2 Monochromatische(einfärbige) Geraden

Dieser Beweis geht zurück auf Don Chakerian. Er ist sozusagen ein farbiger Verwandter des Satzes von Sylvester Galai.

**Satz 4.3.** *Gegeben sei eine endliche Anordnung von weißen und schwarzen Punkten in der Ebene, welche nicht alle auf einer Geraden liegen. Dann gibt es immer eine monochromatische Gerade, also eine Gerade welche mindestens zwei Punkte der selben Farbe und keinen Punkt der anderen Farbe enthält.*

*Beweis.* Wie für den Beweis vom Satz von Sylvester Gallai, transferiert man das Problem auf die Einheitskugel und betrachtet man dort wiederum die Großkreise und deren orthogonale Großkreise. Dann muss man folgendes beweisen:

*Gegeben sei eine endliche Anordnung von schwarzen und weißen Großkreisen, welche nicht alle durch den selben Punkt gehen., dann gibt es immer einen Schnittpunkt, der entweder nur auf weißen oder nur auf schwarzen Großkreisen liegt.*

Mit Hilfe von Teil c) von Satz 4.1 ist nun die Aussage sofort gezeigt, denn in jeder Ecke, in der Großkreise mit verschiedener Farbe zusammentreffen, gibt es immer mindestens 4 Farbwechsel. Da Teil c) aber besagt, dass es mindestens einen Punkt gibt an dem nur 2 Farbwechsel stattfinden, folgt daraus, dass dieser Punkt nur von Großkreisen einer Farbe gebildet wird. □

### 4.3.3 Satz von Pick

Der Satz von Pick geht zurück auf das Jahr 1899. Der Satz ist ebenfalls eine Folge der Eulerschen Polyederformel.
Für das folgende Lemma definiert man:

**Definition 4.2.** *Ein konvexes Polygon $P \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt elementar, wenn die Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben, d.h., wenn sie im Gitter $\mathbb{Z}^2$ liegen, und sie keine weiteren Gitterpunkte enthalten.*

**Lemma 4.1.** *Für jedes elementare Dreieck $\triangle = conv\{p_0, p_1, p_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt, dass der Flächeninhalt $A(\triangle) = \frac{1}{2}$ ist.*

*Beweis.* Das Parallelogramm mit den Eckpunkten $p_0, p_1, p_2, p_1 + p_2 - p_0$ und das Gitter $\mathbb{Z}^2$ sind symmetrisch bezüglich der Abbildung

$$\sigma : x \longmapsto p_1 + p_2 - x$$

welches die Spiegelung bezüglich der Mitte der Strecke von $p_1$ nach $p_2$ ist. Daraus folgt, dass das Parallelogramm $P = \triangle \cup \sigma(\triangle)$ elementar ist und aufgrund der Ganzzahligkeit kann so die Ebene gepflastert werden. Deshalb ist $p_1 - p_0, p_2 - p_0$ eine Basis des Gitters $\mathbb{Z}^2$ und hat eine Determinante von $\pm 1$. P ist also ein Parallelogramm mit Fläche 1 und daraus folgt, dass das elementare Dreieck eine Fläche von $\frac{1}{2}$ hat.

*Eine Basis von $\mathbb{Z}^2$ ist ein paar von linear unabhängigen Vektoren $e_1, e_2$ mit dessen Hilfe durch Linearkombination der ganze Raum aufgespannt werden kann*

$$\mathbb{Z}^2 = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

*Sei $e_1 = \binom{a}{b}$ und $e_2 = \binom{c}{d}$, dann ist die Fläche des Parallelogramm, welches von $e_1$ und $e_2$ aufgespannt wird gegeben durch $A(e_1, e_2) =\mid det(e_1, e_2) \mid=\mid det(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}) \mid$. Sei $f_1 = \binom{r}{s}$ und $f_2 = \binom{t}{u}$ eine weitere Basis, dann existiert eine invertierbare $\mathbb{Z}$-matrix $Q$ mit $(\begin{smallmatrix} r & t \\ s & u \end{smallmatrix}) = (\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix})Q$. Weil gilt $QQ^{-1} = (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$ und die Determinante ganzzahlig ist, folgt, dass $\mid det(Q) \mid= 1$ und daraus folgt, dass gilt $\mid det(e_1, e_2) \mid=\mid det(f_1, f_2) \mid$. Deshalb gilt für alle Paralleogramme die aus Basisvektoren gebildet wurden, dass die Fläche 1 beträgt, da $A((\binom{1}{0}), (\binom{0}{1})) = 1$*

□

**Satz 4.4** (Satz von Pick)**.** *Die Fläche von jedem, auch nicht konvexen Polygon $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten mit ganzzahligen Koordinaten ist gegeben durch*

$$A(Q) = n_{int} + n_{bd} - 1,$$

*wobei $n_{int}$ die Anzahl der Inneren Punkte und $n_{bd}$ die Anzahl der Randpunkte von $Q$ ist.*

*Beweis.* Jedes solche Polygon kann trianguliert werden, d.h., in lauter Dreiecke unterteilt werden, indem man alle Inneren Gitterpunkte $n_{int}$ und alle Gitterpunkte $n_{bd}$ am Rand von $Q$ nimmt. (Dass das möglich ist, wird in Kapitel 35 im Buch Proofs from the book bewiesen.)
Man kann nun den neuen Graphen, der durch die Triangulation entstanden ist, als einen ebenen Graphen interpretieren, der die Ebene in eine unbegrenzte Fläche und $f - 1$ Dreiecke mit Fläche $\frac{1}{2}$ unterteilt, dann gilt:

$$A(Q) = \frac{1}{2}(f - 1)$$

Jedes Dreieck hat drei Seiten, wobei jede der inneren Kanten $e_{int}$ zwei Flächen (Dreiecke) begrenzt. Die äußeren Kanten $e_{bd}$ begrenzen jeweils nur ein

Dreieck. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 3(f-1) &= 2e_{int} + e_{bd} \\ 3f - 3 &= 2(e_{int} + e_{bd}) - e_{bd} \\ f &= 2e - 2f - e_{bd} + 3 \\ f &= 2(e-f) - e_{bd} + 3 \end{aligned}$$

Außerdem ist die Anzahl der äußeren Ecken gleich der Anzahl der äußeren Kanten, $n_{bd} = e_{bd}$. Mit Hilfe dieser zwei Aussagen und Euler's Formel folgt nun:

$$\begin{aligned} f &= 2(e-f) - e_{bd} + 3 \\ &= 2(n-2) - n_{bd} + 3 \\ &= 2n_{int} + 2n_{bd} - 4 - n_{bd} + 3 \\ &= 2n_{int} + n_{bd} - 1 \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$A(Q) = \frac{1}{2}(f-1) = n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1$$

$\square$

# Literaturverzeichnis

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler: *Proofs from the BOOK*, 4.Auflage, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2010

[2] Reinhard Diestel: *Graphentheorie*, 4.Auflage, Springer Verlag Heidelberg Dordrecht London New York, 2010