Schubfachprinzip und doppeltes Abzählen

Martin Hierz, 0912867

November 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit werden die Prinzipien des Schubfachschlusses und des doppelten Abzählens vorgestellt. Es wird gezeigt, dass diese doch recht einfach zu durchschauenden Teilgebiete der Kombinatorik auch erheblich zur Lösung von komplexeren Problemen der Graphentheorie beitragen.

Zunächst werden die oben genannten Prinzipien erläutert und mit eleganten Beweisen kombinatorischer Probleme verständlich gemacht. Im Anschluss werden die Graphentheorie und ein paar ihrer im Anschluss benötigten Grundbegriffe kurz vorgestellt und abschließend der Beweis von Sperners Lemma, mit dessen Hilfe sich Brouwers Fixpunktsatz beweisen lässt, sowie eine Aussage über Graphen ohne Viererkreise dargelegt.

1.1 Das Schubfachprinzip

Kurz gesagt geht es darum, dass n Objekte in r Fächer gegeben werden. Wenn $r < n$ gilt, dann folgt daraus direkt, dass in zumindest einem Fach mehr als ein Element enthalten ist. Ein sehr einfaches Beispiel aus der Praxis wäre die Tatsache, dass, wenn von einem regulären Pack Spielkarten mit den vier Farben Kreuz, Pik, Karo und Herz fünf Karten gezogen werden, mindestens eine Farbe doppelt vorkommen muss.

Präziser formuliert, lässt sich das Prinzip folgendermaßen erklären:

> N und R sind zwei endliche Mengen, wobei gilt:
> $|N| = n > r = |R|$
> und weiters gibt es eine Abbildung: $f : N \rightarrow R$, so gibts es ein $a \in R$ sodass $|f^{-1}(a)| \geq 2$.

Satz 1. *Die Mengen N und R sowie die Abbildung f seien wie oben definiert. Dann existiert ein $a \in R$ mit*

$$|f^{-1}(a)| \geq \lceil \frac{n}{r} \rceil \tag{1.1}$$

Beweis. Wenn $|f^{-1}(a)| < \frac{n}{r}\ \forall a \in R$ gelten würde, folge daraus, dass $n = \sum_{a \in R} |f^{-1}(a)| < r\frac{n}{r} = n$ sei, was einen offensichtlichen Widerspruch darstellt. □

1.2 Doppeltes Abzählen

Wie der Name dieses Prinzips schon vermuten lässt, wird hier die Mächtigkeit einer Menge auf zwei verschiedene Arten abgezählt. Das Ergebnis muss natürlich bei beiden Malen gleich sein und somit erhält man eine Gleichung.
Genauer gesagt bedeutet dies:

Satz 2. *R und C seien endliche Mengen. Sei nun $S \subseteq R \times C$. Die Elemente $p \in R$ und $q \in C$ bezeichnen wir als inzident, wenn $(p, q) \in S$. Seien nun r_p*

die Anzahl der Elemente, die zu $p \in R$ und c_q die Anzahl der Elemente, die zu $q \in C$ inzident sind, so gilt

$$\sum_{p \in R} r_p = |S| = \sum_{q \in C} c_q$$

Beweis. Sei die Matrix $A = (a_{pq})$ die Inzidenzmatrix von S, welche folgendermaßen definiert sei:

$$a_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (p,q) \in S \\ 0 & \text{falls} (p,q) \notin S \end{cases}$$

Nun ist klarerweise r_p die Summe der p-ten Zeile von A, da ja dies genau die Anzahl der Elemente $q \in C$ ist, die zu p inzident sind. Gleichzeitig ist aber auch c_p gleich der Summe der q-ten Spalte. Summiert man nun über die Spalten- bzw. Zeilensummen, muss natürlich in beiden Fällen das gleiche Ergebnis herauskommen. □

Dieses Prinzip sehen wir uns in einer einfachen Anwendung für ein besseres Verständnis kurz an:

An einer Lehrveranstaltung nehmen 20 Studenten teil, die Anzahl der Studentinnen ist nicht bekannt und sei mit w bezeichnet. Man weiß jedoch, dass jeder Student je 5 seiner Kommilitoninnen kennt und jede Studentin je 4 ihrer Kommilitonen. Wir nehmen an, dass "kennen" eine Eigenschaft ist, die nur beiderseitig auftritt, also dass ein Student eine Studentin genau dann kennt, wenn diese ihn auch kennt. Somit gibt es von männlicher Seite $20 \times 5 = 100$ Verbindungen. Natürlich muss diese Anzahl insgesamt bei den weiblichen Teilnehmerinnen gleich sein, also $w \times 4 = 100 \leftrightarrow w = 25$. Somit wissen wir, dass 25 Studentinnen die Lehrveranstaltung besuchen.

2 Nützliche Lösungen kombinatorischer Probleme

In diesem Abschnitt werden ein paar nützliche Ergebnisse vorgestellt, die man mit Zuhilfenahme des Schubfachprinzips erhält.

Satz 3. *Wenn man aus der Menge $X = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ $n+1$ beliebige Zahlen auswählt, gibt es unter ihnen mindestens zwei Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler haben.*

Beweis. Unter diesen $n+1$ Zahlen gibt es mindestens zwei Zahlen, die sich lediglich um 1 unterscheiden und somit relativ prim zueinander sind. □

Satz 4. *Die Menge X sei wie in Satz 3 definiert. Sei nun $A \subseteq X$ mit $|A| = n+1$. Es gibt nun mindestens zwei Zahlen $a, b \in A$, sodass $a|\ b$.*

Beweis. Sei jede Zahl $a \in A$ in der Form $a = 2^k m$ geschrieben, sodass m eine ungerade Zahl ist. Diese Zahl kann natürlich nur zwischen 1 und $2n - 1$ liegen. Die Menge der ungeraden Anteile hat somit höchstens n Elemente. Da A jedoch $n + 1$ Elemente enthält, muss nach Schubfachprinzip mindestens ein ungerade Anteil doppelt vorkommen und somit ist mindestens eine Zahl $a \in A$ ein Teiler von einem Element $b \in A$. □

Der folgende Satz stammt aus einer Arbeit von Paul Erdös und George Szekeres über Ramsey-Probleme

Satz 5. *In einer Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{mn+1}$ verschiedener reeller Zahlen gibt es immer eine ansteigende Teilfolge*

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_{m+1}} \qquad (i_1 < i_2 < \ldots < i_{m+1})$$

der Länge $m + 1$, oder eine absteigende Teilfolge

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \ldots > a_{j_{n+1}} \qquad (j_1 < j_2 < \ldots < j_{n+1})$$

der Länge $n + 1$ oder beides.

Beweis. Jedem Folgenglied a_i, $i \in I = \{1, 2, \ldots, mn + 1\}$ wird die Zahl $t_i \in \mathbb{N}$ zugewiesen, die die Länge der längsten, mit a_i beginnenden ansteigenden Teilfolge bezeichnet.

Fall A: $t_i \geq m + 1$ für ein beliebiges $i \in I$. Nun gibt es nichts mehr zu beweisen, denn es gibt nun eine ansteigende Teilfolge mit der Länge $m + 1$.

Fall B: $(t_i \leq m) \forall i \in I$. Sei die Funktion f definiert als

$$f : \begin{cases} \{a_1, \ldots, a_{mn+1}\} \to \{1, \ldots, m\} \\ a_i \longmapsto t_i \end{cases}$$

Aus (1.1) folgt nun, dass es ein $s \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, so dass $f(a_i) = s$ für mindestens $\frac{mn}{m} + 1 = n + 1$ Folgeglieder gilt. Sei nun $f^{-1}(s) = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n+1}}\}$ mit $(j_1 < j_2 < \ldots < j_{n+1})$. Es muss nun für alle Zahlen stets $a_{j_i}, > a_{j_{i+1}}$ gelten. Falls für ein i nämlich $a_{j_i}, < a_{j_{i+1}}$ gelten würde, gäbe es ja eine ansteigende Teilfolge mit Startpunkt a_{j_i} und Länge $s + 1$ (es gibt ja bereits eine Teilfolge der Länge s, welche bei $a_{j_{i+1}}$ beginnt), was in einem Widerspruch zur Voraussetzung stehen würde. Also gilt $a_{j_1} > a_{j_2} > \ldots > a_{j_{n+1}}$, was eine absteigende Teilfolge der Länge $n + 1$ darstellt. □

Der nachfolgende Beweis wird Andrew Vázsonyi und Marta Sved zugeschrieben.

Satz 6. *Gegeben seien n ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die nicht verschieden sein müssen. Dann gibt es immer einen Abschnitt von aufeinanderfolgenden Zahlen $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_l$, $k < l$, $k, l \in \mathbb{N}$, deren Summe $\sum_{i=k+1}^{l} a_i$ ein Vielfaches von n ist.*

Beweis. Es sei $N = \{0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$, also $|N| = n + 1$. Die Anzahl der Restklassen $k + n\mathbb{Z}$ ist natürlich n. Laut Schubfachprinzip gibt es jetzt eine Restklasse, in der sich mindestens zwei Summen $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k,} a_1 + a_2 + \ldots + a_{l,}$ $(k < l)$ aus N befinden, also den gleichen Rest bei der Division durch n haben.

Somit hat natürlich

$$\sum_{i=k+1}^{l} a_i = \sum_{i=1}^{l} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i$$

bei Division durch n den Rest 0. □

3 Graphentheorie

3.1 Einführung

Ein Graph G ist ein Tupel (V, E). V bezeichnet hier die Menge der Knoten (bzw. auch oft Ecken genannt) und E die Menge der Kanten (bzw. oft auch als Bögen bezeichnet). Ein Knoten ist mit einer Kante inzident, wenn diese verbunden sind. Ein einfaches, realitätsnahes Beispiel für Graphen sind U-Bahnnetze. Die Stationen repräsentieren hier die Knoten, die Strecken zwischen den Stationen sind die Kanten.

Es gibt aufgrund spezieller Eigenschaften diverser Graphen weitere Klassifikationen wie *gerichtete Graphen, Graphen mit Mehrfachkanten, Untergraphen, endliche Graphen* und *vollständige Graphen*. Die für die nachfolgenden Beweise nötigen Definitionen zur Graphentheorie werden nun im nächsten Unterabschnitt erläutert.

3.2 Grundbegriffe

Definition 7. Ein Graph G heißt *endlich*, wenn die Menge der Knoten und Kanten endlich ist.

Definition 8. Ein Graph G heißt *einfach*, wenn er ungerichtet ist und keine Mehrfachkanten oder Schleifen besitzt.

Definition 9. Ein Graph G heißt *vollständig*, wenn er einfach ist und alle Knoten des Graphen paarweise verbunden sind. K_n bezeichnet den vollständigen Graphen mit n Knoten. Der vollständige Graph K_n besitzt $\binom{n}{2}$ Kanten. Dies ist dahingehend leicht ersichtlich, als dass jeder der n Knoten mit genau $n - 1$ Knoten durch eine Kante verbunden sein muss, es also $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ Kanten geben muss.

Definition 10. Der *Grad d(v)* eines Knotens v eines endlichen, einfachen Graphen G bezeichnet die Anzahl der mit v inzidierten Kanten.

Satz 11. *Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, einfacher Graph und $d(v)$ der Grad des Knoten $v \in V$, so gilt:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \tag{3.1}$$

Beweis. Sei $S \subseteq V \times E$, wobei S die Menge der Paare (v, e) ist, sodass $v \in V$ inzident ist mit $e \in E$. S kann nun auf zwei Arten gezählt werden. Einerseits trägt jede Ecke $u \in V$ genau $d(u)$ zur Summe bei, also insgesamt$\sum_{v \in V} d(v)$, andererseits ist jede Kante mit genau zwei Punkten inzident, also $2|E|$. Somit gilt $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$. $\square$

Definition 12. Man bezeichnet einen Graphen $G' = (V', E')$ genau dann als *Untergraph* eines Graphen $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ und wenn alle in G' enthaltenen inzidenten Knoten Kanten auch in G inzident sind.

Definition 13. Der *duale Graph* $G' = (V', E')$ zum Graphen G entsteht, wenn in jeder Fläche des Graphen G ein Knoten v' "gezeichnet"wird und für jede Kante $e \in E$ ein Kante e' erstellt wird, die zwei in benachbarten Flächen liegenden Knoten v' verbindet.

Definition 14. Ein *Kreis* der Länge n ist ein Weg $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ mit $v_i \in V$ für $i = 1, \ldots, n$, bei dem nur Start- und Zielpunkt ident sind, also $\forall i, j \in 1, \ldots, n-1$ und $i \neq j$ gilt: $v_i \neq v_j$.

4 Anwendung in der Graphentheorie

Im abschließenden Abschnitt werden nun zwei Beweise im Bereich der Graphentheorie vorgestellt, in welchen die in dieser Arbeit vorgestellten Prinzipien Verwendung finden.

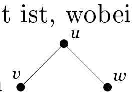
4.1 Graphen ohne Viererkreis

Bemerkung 15. Ein Viererkreis C_4 () ist ein Kreis, der die Länge 4 hat, also aus 4 Kanten und Knoten besteht.

Das folgende Resultat stammt von ISTVAN REIMAN.

Satz 16. *Enthält ein einfacher Graph auf n Ecken keine Viererkreise, so gilt*

$$|E| \leq \lfloor \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n + 3}) \rfloor$$

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten ohne Viererkreis. Sei $d(u)$ der Grad von $u \in V$ und S die Menge der Paare $(u, \{v, w\})$, sodass $u \in V$ jeweils zu $v \in V$ und zu $w \in V$ benachbart ist, wobei $v \neq w$ gelten muss. Es wird also festgestellt, wie oft der Untergraph 

vorkommt.

Halten wir nun ein $u' \in V$ fest und betrachten, mit wievielen Elementen $\{v, w\}$ es ein Paar in der Menge S bildet. Die Anzahl der Knoten, die mit dem

Knoten u' benachbart sind, ist $d(u')$. Nun zählt man die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, ein Paar $(u', \{v, w\})$ zu bilden, sodass es ein Element von S ist. Man hat also $d(u')$ Knoten, die zu u' benachbart sind und wählt "ohne zurücklegen" zwei Elemente aus dieser Menge aus. Für die Auswahl des ersten Knoten hat man $d(u')$ Möglichkeiten, für die des zweiten $d(u') - 1$. Da die Elemente $(u', \{v', w'\})$ und $(u', \{w', v'\})$ ja ident sind, folgt, dass die Anzahl der Elemente aus S, die u' beinhalten, genau $\frac{d(u')(d(u')-1)}{2} = \binom{d(u')}{2}$ ist. Somit erhält man, wenn man über alle $u \in V$ summiert, für $|S| = \sum_{u \in U} \binom{d(u)}{2}$.

Nun haben wir auf eine Art die Mächtigkeit der Menge S abgezählt. Jetzt wissen wir aber, dass jedes Paar $\{v, w\}$ höchstens einen gemeinsamen Nachbar hat, da sonst die Voraussetzung, dass es keine Viererkreise gibt, verletzt wäre. Somit hat die Menge S insgesamt höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Elemente, also $|S| \leq \binom{n}{2}$. Wenn wir nun die Mächtigkeit der Menge S doppelt Abzählen, erhalten wir

$$\sum_{u \in U} \binom{d(u)}{2} \leq \binom{n}{2}$$

Dies bringt man durch eine einfache Umformung auf die Form

$$\sum_{u \in V} d(u)^2 \leq n(n-1) + \sum_{u \in V} d(u) \tag{4.1}$$

Nun wendet man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf den Vektor $(d(u_1), \ldots, d(u_n))$ und den Vektor $(1, 1, \ldots, 1)$ mit der Länge n an:

$$(\sum_{u \in V} d(u))^2 \leq n \sum_{u \in V} d(u)^2$$

Dieses Ergebnis verknüpft man nun mit dem Ergebnis von 4.1 und erhält:

$$(\sum_{u \in V} d(u))^2 \leq n^2(n-1) + n \sum_{u \in V} d(u)$$

Hier wiederum greift man auf das Ergebnis von 3.1 ($\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$) zurück, was folgendes ergibt:

$$4|E|^2 \leq n^2(n-1) + 2n|E|$$

Wenn man dies noch kurz umformt, kann man die Ungleichung

$$|E|^2 - \frac{n}{2}|E| - \frac{n^2(n-1)}{4} \leq 0$$

mit Hilfe der entsprechenden quadratischen Gleichung lösen und erhält somit, da die Mächtigkeit von$E$ eine nicht negative, ganze Zahl sein muss:

$$|E| \leq \lfloor \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n+3}) \rfloor$$

$\square$

4.2 Sperners Lemma

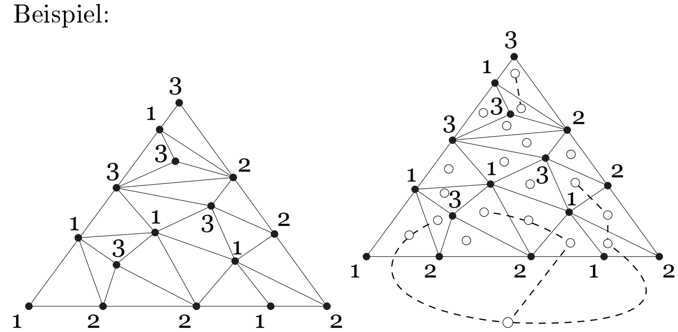
1928 veröffentlichte der erst 23-jährige Emanuel Sperner das folgende einfache kombinatorische Lemma, mit dessen Hilfe man den 1912 publizierten Fixpunktsatz von Luitzen Brouwer eleganter und vor allem mit weniger Aufwand beweisen kann. Diese Ausführung beschränkt sich auf den Fall, dass die Dimension $n = 2$ ist. Die Beweise für höhere Dimensionen sind durch Induktion über die Dimension auf dieses Ergebnis aufbaubar.

Satz 17. *Ein Dreieck mit den Ecken V_1, V_2, V_3wird trianguliert. Das bedeutet, dass es in eine endlich Zahl von "kleineren" Dreiecken zerlegt wird, welche Kante an Kante im Inneren des Dreiecks $\triangle V_1V_2V_3$ liegen. Die Ecken der so durch die Triangulierung entstandenen Dreiecke werden jeweils mit genau einer der Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3\}$ versehen, wobei die Ecken V_i stets mit der Zahl i identifiziert wird. Die Ecken, die auf der Kante von V_i nach V_j, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ liegen, dürfen nur mit i oder j beschriftet werden, die restlichen Ecken erhalten ihre Zahlen nach Belieben.*

Nun muss es unter diesen "kleineren", durch die Triangulierung entstandenen Dreiecken stets eine ungerade Anzahl geben, deren bzw. dessen Ecken mit allen drei verschiedenen Zahlen beschriftet wurde.

Beweis. Der zur Triangulierung duale Graph wird zum Beweis dieses Lemmas benötigt. Wir verwenden von diesem dualen Graphen jedoch nur die Kanten, die eine Kante der Triangulierung kreuzen, deren Endecken mit den Zahlen 1 und 2 versehen wurden. Dieser nun entstehende "partielle duale Graph" G_d hat Grad 1 in allen Ecken, die innerhalb der Fläche von Dreiecken liegen, deren Ecken mit allen drei Zahlen versehen sind. Grad 2 haben jene Ecken von G_d, die in Dreiecken liegen, deren Ecken ausschließlich mit den Zahlen 1 und 2 beschriftet sind und auch beide vorkommen. Alle anderen Knoten von G_d haben den Grad 0. Somit haben ausschließlich die Ecken von G_d, die in einem mit allen drei Zahlen beschriebenen Dreieck liegen, einen ungeraden Grad.

Beispiel:



Der Knoten von G_d, der außerhalb des Dreiecks $\triangle V_1V_2V_3$ liegt, hat einen ungeraden Grad. An der Kante V_1V_2 kommt es nämlich zu einer ungeraden Anzahl an Wechseln zwischen den Knoten mit den Beschriftungen 1 und 2. Dies zeigt eine kurze Induktion nach der Anzahl n der auf der Kante V_1V_2 liegenden Knoten:

Induktionsbeginn: $n = 1$ so folgt, dass auf der Kante V_1V_2 ein Knoten liegt, welcher entweder mit 1 oder 2 bezeichnet wird. In beiden Fällen kommt es genau zu einem Wechsel zwischen den Beschriftungen, also einer ungeraden Anzahl.

Induktionsannahme: Für n auf der Kante $V_{1,}V_2$ liegende Knoten ist die Anzahl der Zahlenwechsel ungerade.

Induktionsschluss: $n \rightarrow n + 1$

Laut Induktionsannahme ist die Anzahl der Wechsel bei n Knoten ungerade. Fügt man nun einen weiteren, mit 1 oder 2 beschrifteten Knoten hinzu, kann es zu folgenden 3 Fällen kommen:
A: Der zusätzliche Knoten wird zwischen zwei unterschiedliche Knoten platziert. In diesem Fall ändert sich die Anzahl der Wechsel nicht, da der neue Knoten die Zahl eines seiner Nachbarn trägt
B: Der neue Knoten wird zwischen zwei mit der gleichen Zahl beschrifteten Knoten platziert und hat nicht die gleiche Farbe, wie diese beiden. In diesem Fall erhöht sich die Anzahl der Wechsel um zwei und bleibt insgesamt noch immer ungerade
C: Der $n + 1$te Knoten wird zwischen zwei gleich bezifferten Ecken hinzugefügt und trägt die gleiche Zahl wie diese. Hier kommt es wieder zu keiner Änderung der Anzahl von Wechsel.

In allen drei Fällen bleibt die Anzahl der Wechsel zwischen Knoten mit der Beschriftung 1 und 2 ungerade und somit ist die Induktion erfüllt.

Dies bedeutet aber, dass eine ungerade Anzahl an Kanten von G_d die große Kante V_1, V_2 kreuzt und der äußere Knoten von G_d somit einen ungeraden Grad aufweist. Auf den anderen beiden Außenkanten gibt es natürlich keine Kanten von G_d, da hier ja keine Kanten mit den Endecken 1 und 2 auftreten können.

Nun sind wir aber bereits am Ende des Beweises, denn aus dem Ergebnis von 3.1 ($\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$) folgt, dass die Summe der Grade eines endlichen Graphen immer gerade ist. Somit muss es eine ungerade Anzahl an Knoten von G_d mit ungeradem Grad im Inneren des Dreicks $\triangle V_1V_2V_3$ geben und somit eine ungerade Anzahl an Dreiecken der Triangulierung, deren Ecken mit allen drei Zahlen beschriftet wurden. $\square$

Literatur

[1] Das BUCH der Beweise; Martin Aigner, Günter M. Ziegler und Karl H. Hofmann; Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

[2] Einführung in die Theorie der endlichen Graphen; Horst Sachs; Carl Hanser Verlag München 1970

[3] wikipedia.org