Der Fünf-Farben-Satz

Lukas Schweighofer

Feb.2014

Contents

1 Vorwort

Diese Seminararbeit wurde im Rahmen der Lehrveranstaltung 621.224 Seminar aus (reiner Mathematik) im Wintersemester 2013/14 erarbeitet. Es behandelt den Fünf-Farben-Satz, ein Problem zur Färbbarkeit von Graphen. Zu Beginn der Arbeit werden einige grundlegende graphentheoretische Begriffe eingeführt, im Anschluss wird der Satz neu formuliert und auf zwei verschiedene Arten bewiesen, zu erst direkt, und dann indirekt, indem ein stärkerer Satz bewiesen wird.

Satz (Fünf-Farben-Satz)
Es ist möglich, Gebiete einer ebenen Landkarte so mit fünf Farben zu färben, dass zwei angrenzende Gebiete (also mit einer Grenzlinie zwischen den Gebieten) niemals dieselbe Farbe enthalten. Um diesen Satz zu beweisen, empfiehlt es sich das Problem in ein Graphentheoretisches umzuformen. Dazu sollten zuerst einige grundlegende Begriffe der Graphentheorie definiert und erklärt werden, dann kann ein äquivalentes Problem formuliert werden, welches einfacher lösbar ist.

2 Graphentheoretische Grundlagen

Definition: Graph
Ein *Graph* $G = (V, E)$ ist eine Menge von Knoten $V = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$ und Kanten $E = \{E_1, E_2, ...E_\eta\}$. Als Kanten bezeichnet man die Verbindungen von jeweils zwei Knoten. Die Kante $E_l = (V_3, V_8)$ verbindet zum Beispiel die beiden Knoten V_3 und V_8 miteinander. Zwei Knoten V_i,V_t heissen benachbart, falls eine Kante (V_i, V_t) existiert.

Definition: Grad eines Knotens
Der *Grad* $degV_i$ eines Knotens V_i bezeichnet die Anzahl der Kanten (V_i, V_j) (Gilt $V_i = V_j$ so wird die Kante (V_i, V_j) doppelt gezählt. Solch eine Kante nennt man Schleife). Weiters bezeichnet man mit $d = \frac{1}{|V|}\Sigma_{i\leq|V|} degV_i$ den *Durchschnittsgrad* des Graphs.

Definition: Einfacher Graph
Graphen ohne Schleifen und Mehrfachkanten (das bedeutet, dass zwischen zwei benachbarten Knoten genau eine Kante existiert) für die zusätzlich gilt $\forall a, b \in V : \exists (a, b) \in E : (a, b) = (b, a)$ nennt man *einfach.* Im Folgenden werden ausschliesslich einfache Graphen behandelt.

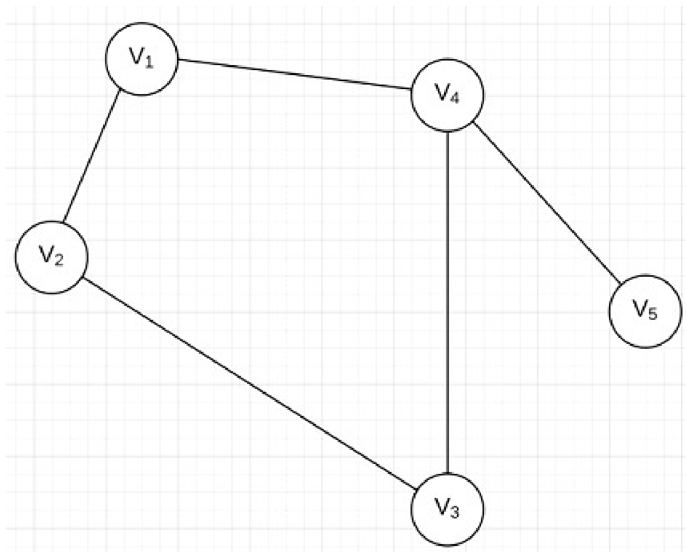

Figure 1: Graph mit 5 Knoten und 5 Kanten. $degV_1 = degV_2 = degV_3 = 2, degV_4 = 3, degV_5 = 1, d = 2$

Definition: Untergraph
Ein Graph $H = (V_2, E_2)$ heisst *Untergraph* von $G = (V_1, E_1)$, falls $V_2 \subseteq V_1$ und $\forall V_i, V_t \in V_2 : (V_i, V_t) \in E_2 \Leftrightarrow (V_i, V_t) \in E_1$.

Definition: Teilgraph
Ein Graph $H = (V_2, E_2)$ heisst *Teilgraph* von $G = (V_1, E_1)$, falls $V_2 \subseteq V_1$ und $E_2 \subseteq E_1$.

Definition: Weg
Ein *Weg* bezeichnet eine Folge von Knoten $(V_1, V_2, ...V_k) \subseteq V$, in welcher je zwei aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden werden. Kein Knoten V_l darf in einem Weg mehr als einmal vorkommen. Knoten welche Bestandteil keines Weges (also Grad 0 haben) sind nennt man auch isolierte Knoten.

Definition: Färbung von Graphen, chromatische Zahl
Eine *Färbung von Graphen* ordnet jedem Knoten eine Farbe/Eigenschaft zu, dies entspricht einer Funktion f mit:

$$f : V \to F$$

wobei

$$F \cong N \subseteq \mathbb{N}$$

F ist eine Menge von Eigenschaften (zum Beispiel $\{rot, gelb, ..., orange\}$ oder $\{1, 2, 3, , 15\}$). Die Färbung heisst *gültig*, wenn je zwei benachbarte Knoten unterschiedlich gefärbt sind, ansonsten heisst sie *ungültig*. Man definiert die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ als kleinste Zahl, sodass G mit $\chi(G)$ Farben gültig gefärbt werden kann.

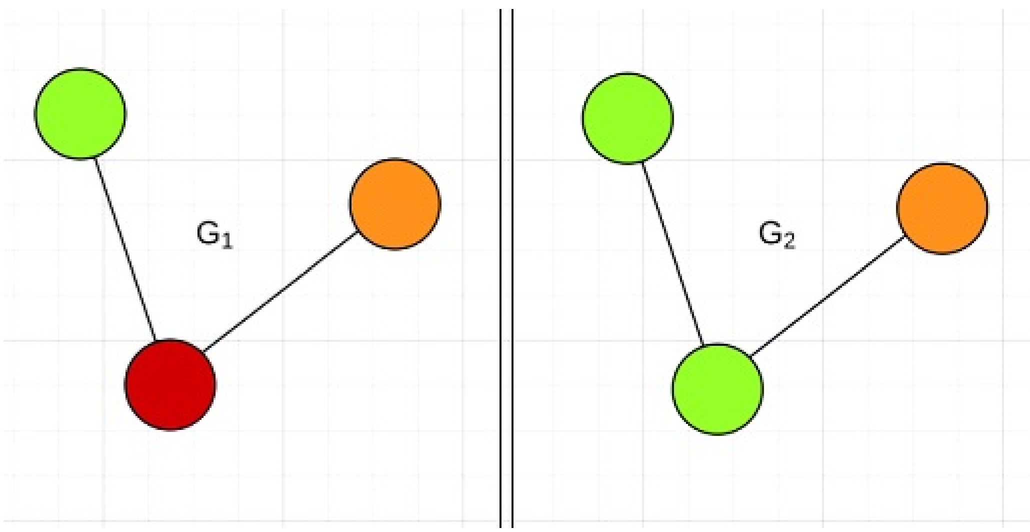

Figure 2: Graph mit 5 Knoten und 5 Kanten. $degV_1 = degV_2 = degV_3 = 2, degV_4 = 3, degV_5 = 1, d = 2$

Definition: zusammenhängender Graph
Ein Graph heisst *zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten durch einen Weg des Graphen verbunden werden können.
Definition: Komponente
Als *Komponente* eines Graphs G bezeichnet man einen maximalen zusammenhängenden Untergraphen. Ist G ein zusammenhängender Graph, so gibt es nur eine Komponente, G selbst.

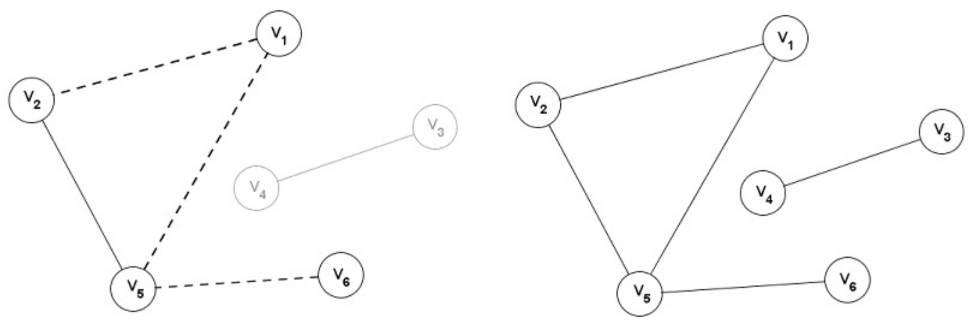

Figure 3: Graph mit 5 Knoten und 5 Kanten. $degV_1 = degV_2 = degV_3 = 2, degV_4 = 3, degV_5 = 1, d = 2$

Definition: Kreis
Existiert genau ein Weg $(V_1, V_2, ..., V_k)$ und die Kante (V_1, V_k), so nennt man die Folge von Knoten $(V_1, V_2, ..., V_k, V_1)$ einen *Kreis*. Einen Graph ohne Kreise nennt man *kreisfrei*.

Definition: planarer Graph
Graphen, welche in der Ebene dargestellt werden können, sodass sich keine zwei Kanten schneiden, nennt man *planare* oder *ebene Graphen*.

Definition: Gebiet
Ist ein ebener Graph, so wird die Ebene durch die Knoten und Kanten in endlich viele zusammenhängende Flächen zerlegt, welche als *Gebiete* von bezeichnet werden.

Mit den obigen Definitionen können nun folgende Sätze formuliert und bewiesen werden.

3 Satz 2 (Eulerscher Polyedersatz)

Sei G ein zusammenhängender, planarer Graph. Beschreibe $|V|$ die Anzahl der Knoten, $|F|$ die Anzahl der Gebiete und $|E|$ die Anzahl der Kanten. Dann gilt:

$$|V| + |F| - |E| = 2$$

Beweis (durch Induktion)

Induktionsbeginn:
Ein Graph mit einem Knoten. Dieser Graph hat keine Kanten und nur ein Gebiet (das Aussengebiet).

$$|V| + |F| - |E| = 1 + 1 - 0 = 2$$

Indutkionsschritt:
Der Graph kann nun erweitert werden durch:

- Hinzufügen eines Knotens (und einer Kante, die diesen Knoten mit dem alten Graphen verbindet, damit der Graph zusammenhängend ist). Damit erhöhen sich sowohl als auch um 1, die Differenz bleibt gleich. Hinzufügen einer Kante Da der Graph vorher schon zusammenhängend war, existiert ein Weg. Durch
- Hinzufügen der Kante entsteht folglich ein neuer Kreis, welcher wiederum die Anzahl der Gebiete um 1 erhöht. Wieder ändert sich nichts an der Richtigkeit der Gleichung.

Jeder planare, zusammenhängende Graph kann wie oben beschrieben konstruiert werden, somit gilt der Satz für all diese.

qed

4 Satz 3

In einem planaren Graphen gibt es immer zumindest einen Knoten mit Knotengrad höchstens 5.

Beweis

Ein Gebiet wird immer von mindestens 3 Kanten umgeben, und eine Kante berührt maximal 2 Flächen. Daraus ergibt sich folgende Ungleichung:

$$2 \cdot |E| \geq 3 \cdot |F|$$

bzw.

$$\frac{2}{3} \cdot |E| \geq |F|$$

Mithilfe des eulerschen Polyedersatzes und obiger Ungleichung erhält man:

$$2 = |V| + |F| - |E| \leq |V| + \frac{2}{3} \cdot |E| - |E| = |V| - \frac{1}{3} \cdot |E|$$

Eine einzelne Kante verbindet jeweils 2 Knoten, deshalb kann d (der Durchschnittsgrad des Graphs) auch als $d = \frac{2 \cdot |E|}{|V|}$ geschrieben werden. Durch einsetzen in die vorher erhaltene Ungleichung ergibt sich:

$$2 \leq \frac{2 \cdot |E|}{d} - \frac{1}{3} \cdot |E|$$

Durch etwaige Umformungen:

$$d \leq \frac{6 \cdot |E|}{6 + |E|} < 6$$

Folglich ist der Durchschnittsgrad des Graphs echt kleiner als 6. Dies impliziert, dass es zumindest eine Ecke V_k mit $degV_k \leq 5$ geben muss.

qed

Jetzt wurden etliche Definitionen eingeführt, und Sätze bewiesen, wie jedoch hilft das das ursprüngliche Problem zu lösen? Hat man eine Landkarte vor sich, so gibt es Länder, und deren Grenzen zwischen einander. Erstellt man nun einen Graphen, indem die Knoten die Länder darstellen, und zwei Knoten durch eine Kante verbunden werden, genau dann, wenn die Länder eine gemeinsame Grenze haben, so erkennt man schnell, dass das Problem des Färbens des Graphs äquivalent zur Färbbarkeit der Landkarte ist. Es reicht also zu zeigen, dass ein solcher, planarer Graph fünf-färbbar ist.

5 Der Fünf-Farben-Satz

Jeder planare Graph ist fünf-färbbar, also kann mit maximal 5 Farben gültig gefärbt werden.

5.1 Beweis 1

Induktionsbeginn:
Der triviale Graph mit $|V| = 1$ ist fünf-färbbar.

Induktionsvoraussetzung: Der Satz gilt für Graphen mit $n - 1 (n \in \mathbb{N}_{>0})$ Knoten.

Induktionsschritt:
Sei G ein zusammenhängender, planarer Graph mit n Knoten. Aus Satz 3 ist bekannt, dass es zumindest einen Knoten $\tilde{V}$ in G mit Grad $deg\tilde{V} \leq 5$ geben muss. G ohne $\tilde{V}$ hat $n - 1$ Knoten, ist also fünffärbbar.

Fall 1: Im Graph G gibt es einen Knoten $\tilde{V}$ mit $deg\tilde{V} < 5$. Laut Induktionsvoraussetzung ist $G' = G \backslash \tilde{V}$ (das entspricht G ohne $\tilde{V}$ und den zugehörigen Kanten) fünf-färbbar. $\tilde{V}$ in G hat maximal 4 benachbarte Knoten, und kann mit einer der übrigen Farben gültig gefärbt werden.

Fall 2: Im Graph G gibt es keinen Knoten mit Grad kleiner 5. Nun folgt, dass es zumindest einen Knoten $\tilde{V}$ mit $deg\tilde{V} = 5$ gibt. Hierbei ist es wieder hilfreich, in weitere Fälle zu unterscheiden.

Fall 2.1: Die benachbarten Knoten von $\tilde{V}$ sind mit 4, oder weniger Farben gefärbt. Ist dies der Fall, lässt sich mit eine der verbleibenden Farben färben. Die Färbung von wäre damit wieder gültig.

Fall 2.2: Die Nachbarn von $\tilde{V}$ sind mit 5 verschiedenen Farben gefärbt, man bezeichne diese Knoten im Folgenden mit $a_1, a_2, .., a_5$(im Uhrzeigersinn durchnummeriert).

Fall 2.2.1: Es gibt keinen Weg $W = (a_1, b_1, ..., b_k, a_3) \subseteq V$ mit $\tilde{V} \notin W$ und $\forall a \in W : a$ hat die selbe Farbe wie a_1 oder a_3.

Dann färben wir den Knoten a_1 auf die Farbe von a_3. Alle benachbarten Knoten von a_1 mit der Farbe von a_3 werden auf die ehemalige Farbe von umgefärbt. Für alle Knoten, die durch den letzten Schritt umgefärbt wurden wird die Prozedur wiederholt. Am Ende ergibt sich, dass a_1 und a_3 mit der selben Farbe gefärbt sind. So kann man $\tilde{V}$ in der ursprünglichen Farbe von a_1 färben.

Fall 2.2.2: Es gib einen Weg $W = (a_1, b_1, ..., b_k, a_3) \subseteq V$ mit $\tilde{V} \notin W$ und $\forall a \in W : a$ hat die selbe Farbe wie a_1 oder a_3.

Würde man die Schritte aus Fall 2.2.1 hier nun anwenden, erhielte man, dass a_1 und a_3 die Farben tauschen, und das Problem blieb unverändert. Nun betrachte man die Knoten a_2 und a_4, sollten diese durch einen Weg verbunden sein, welcher nicht über $\tilde{V}$ führt, folgt auf Grund der Planarität des Graphs, dass dieser den Weg W schneidet (also zumindest einen gemeinsamen Knoten besitzt). Dies folgert sofort, dass kein Weg $T = (a_2, ...a_4) \subseteq V$, mit $\tilde{V} \notin T$ und $\forall a \in W : a$ hat die selbe Farbe wie a_2 oder a_4 existieren kann. Nun kann man die selben Umfärbungen wie in Fall 2.2.1 anwenden, und erhält, dass a_2 und a_4 gleich gefärbt sind, also dass $\tilde{V}$ in die fünfte vorhandene Farbe gefärbt werden kann.

Somit sind zusammenhängende, planare Graphen fünf-färbbar. Sei G nun planar, aber nicht zusammenhängend, so sagt der obige Induktionsbeweis, dass zumindest jede Komponente von G fünf-färbbar ist. Nach einfacher überlegung, folgt damit die Gültigkeit des Satzes für planare Graphen.

qed

Nun ist zwar schon bewiesen, dass jeder planare Graph fünf-färbbar ist, jedoch kann man diesen Satz durch andere Herangehensweisen beweisen. Für den folgenden Beweis müssen erst ein paar neue Begriffe eingeführt und erläutert werden.

Definition: Listenfärbung, k-listenfärbbar, listenchromatische Zahl
Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $\{C(v)\}_{v \in V}$ eine Familie von Farben, so nennt man eine gültige Färbung $c : V \to \bigcup_{v \in V}, v \mapsto c(v) \in C(v)$ eine *Listenfärbung*. G heisst *k-listenfärbbar*, falls für jede Familie von Farben $\{C(v)\}_{v \in V}$ mit $|C(v)| = k$ für jedes $v \in V$ G eine Listenfärbung besitzt. Die kleinste Zahl k, für diese ein Graph k-listenfärbbar ist, nennt man *listenchromatische Zahl* $\chi_l(G)$.

Bemerkung
Es gilt $\chi(G) \leq \chi_l(G)$, da $\chi(G)$ mit $\forall u, v \in V : C(v) = C(u)$, einen Spezialfall der Listenfärbung darstellt.

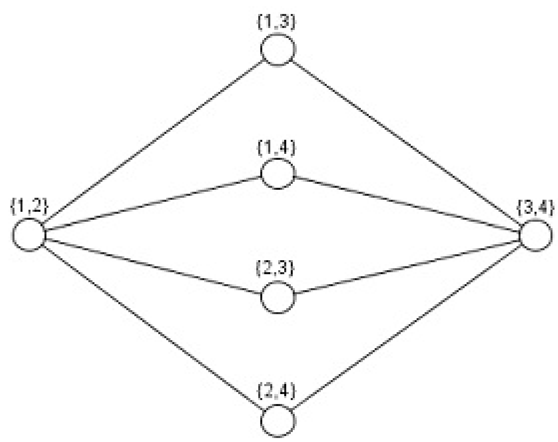

Figure 4: Graph mit 5 Knoten und 5 Kanten. $degV_1 = degV_2 = degV_3 = 2, degV_4 = 3, degV_5 = 1, d = 2$

Definition: Triangulierter Graph, fast-triangulierter Graph
Ein Graph heisst *fast-trianguliert*, wenn jedes beschränkte Gebiet von genau drei Knoten berührt wird. Gilt dies auch für das äussere, unbeschränkte Gebiet, so nennt man den Graphen *trianguliert*.

Bemerkung
Durch hinzufügen von Kanten kann jeder Graph trianguliert werden.

Satz (Fünf-Farben-Satz)
Für jeden planaren Graph G gilt $\chi_l(G) \leq 5$.

5.2 Beweis 2

Zuerst sei gesagt, dass durch hinzufügen von Kanten die listenchromatische Zahl nicht verringert wird, aufgrund dessen genügt es im Folgenden einen zusammenhängenden, fast-triangulierten Graphen zu betrachten.
Dieser Beweis basiert wie der vorherige auch auf Induktion und Fallunterscheidungen.
Sei G ein fast-triangulierter Graph, und $K = (\bar{V}, \bar{E})$ der Teilgraph (der Kreis), der das unbeschränkte Gebiet begrenzt. Folgende Annahmen werden getroffen:

- $\exists a, b \in \bar{V} : a, b$ benachbart, und in unterschiedlichen Farben f_a, f_b gefärbt sind
- $\forall v \in \bar{V} : 3 \leq |C(v)| \leq 5$
- $\forall v \in V \backslash \bar{V} : |C(v)| = 5$

Die Färbung von G kann gültig fortgesetzt werden.

Induktionsbeginn:
Für Graphen G mit $|V| = 3$ ist die Aussage trivial, da $\exists! c \in \bar{V}$ und laut Voraussetzungen $|C(v)| \geq 3$ gilt, kann c mit eine der verbleibenden Farben in $C(c)$ gefärbt werden.

Induktionsvoraussetzung:
Der Satz gilt für Graphen mit $n - 1 (n \in \mathbb{N}_{>3})$ Knoten.

Induktionsschritt:
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, der die obigen Annahmen erfüllt und gelte $|V| = n$.

Fall 1: $\exists \eta, \theta \in \bar{V} : (\eta, \theta) \in E \backslash \bar{E}$

$G \backslash \{\eta, \theta\}$ ist nun ein nichtzusammenhängender Graph, welcher aus 2 Komponenten $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ besteht. Seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit die beiden bereits gefärbten Knoten $a, b \in V_1 \cup \{\eta, \theta\}$. Laut Induktionsvoraussetzung gilt nun $\chi_l(G_1 \cup \{\eta, \theta\} \leq 5$, somit kann $G_1 \cup \{\eta, \theta\}$ gültig gefärbt werden, wobei η die Farbe f_η und θ die Farbe f_θ zugeordnet werden. Betrachtet man nun $\bar{G_2} := G_2 \cup \{\eta, \theta\}$, und seien η und θ schon wie oben gefärbt, dann erfüllt $\bar{G_2}$ die Voraussetzungen, und die Induktionsvoraussetzung gilt, wobei $\chi_l(\bar{G_2}) \leq 5$ gilt. Daraus folgt wiederum, dass $\bar{G_2} \cup G_1$, also G, gültig gefärbt werden kann.

Fall 2: $\exists \eta, \theta \in \bar{V} : (\eta, \theta) \in E \backslash \bar{E}$

Sei $c \in V \backslash \{b\}$, mit $(c, a) \in \bar{E}$ und $C(c) = \{\gamma, \delta, ...\}$, wobei $f_a \notin \{\gamma, \delta\}$. Weiters sei $\{a, c_1, c_2, ..., c_r, d\}$ die Menge der Nachbarn von c und $d \in \bar{V}$. Definiert man $\ddot{G} := G \backslash \{c\}$ und $\ddot{C}(c_i) := C(c_i) \backslash \{\gamma, \delta\}$ so erfüllt $\ddot{G}$ alle Voraussetzungen und unterliegt damit der Induktionsvoraussetzung, also gilt $\chi_l(\ddot{G}) \leq 5$. Fügt man nun c zum gefärbten Graphen $\ddot{G}$ hinzu, kann c gültig mit γ oder δ gefärbt werden, weil d schliesslich nicht mit beiden Farben gefärbt werden kann.

qed

$\Rightarrow \forall$ Graphen $G = (V, E)$ zusammenhängend, fast-trianguliert : $\chi_l(G) \leq 5 \Rightarrow \chi(G) \leq 5$. Also sind alle zusammenhängenden, fast-triangulierten Graphen fünffärbbar, und da man jeden planaren Graphen durch hinzufügen von Kanten zu einem zusammenhängenden, triangulierten Graphen erweitern kann, gilt der Satz auch für diese.

Der eben bewiesene Fünf-Farben-Satz lässt sich noch verallgemeinern, und zwar reichen bei richtiger Färbung schon vier verschiedene Farben aus, um planare Graphen gültig zu färben. Die Beweise die dazu existieren sind jedoch Computerbeweise, mit mehreren hundert Fallunterscheidungen. Im Laufe der Zeit wurde der Beweis vereinfacht, und damit vor allem die Anzahl der Fallunterscheidungen immer niedriger, begonnen mit unendlich, vereinfacht auf knapp über 1900 und aktuell zirka 600.

6 Anwendung

Angenommen eine Region soll mit Masten für den Mobilfunk ausgestattet werden. Sie werden so aufgestellt, dass man an jedem Ort im Gebiet Empfang zu zumindest einen Masten hat. Jeder Mast kann ein Gebiet abdecken. Benachbarte Masten sollten andere Frequenzen benutzen, damit es in Bereichen, in denen sich die Empfangsgebiete überschneiden nicht zu Interferenzen kommt, dies entspricht aber genau der Färbung von Graphen.