KARL FRANZENS UNIVERSITÄT GRAZ

Seminar aus reiner Mathematik

Ein Lob der Ungleichungen

Tschernutter Daniel

14. November 2013

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung

Diese Seminararbeit behandelt das Kapitel aus dem Werk *Proofs from the Book* von Martin Aigner und Günter Ziegler (dritte englische Auflage, Springer, 2003) mit dem Titel ein Lob der Ungleichungen. Es werden zunächst zwei der wohl bekanntesten Ungleichungen auf besonders elegante und dem Titel des Buches würdige Art bewiesen. Die Erste der beiden ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, die zweite ist die Ungleichung vom harmonischen, geometrischen und arithmetischen Mittel. Im Anschluss werden mehrere interessante Sätze behandelt, die mit den beiden Ungleichungen bewiesen werden können.

1 Beweise der Ungleichungen

1.1 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Die erste Ungleichung, die im Folgenden betrachtet wird, geht zurück auf Cauchy, Schwarz und Buniakowski. Die Herkunft des angegeben Beweises ist unklar und wird eher als mathematisches Allgemeingut betrachtet.

1.1.1 Formulierung

Sei $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$ ein inneres Produkt auf einem reellen Vektorraum V (mit der Norm $|\boldsymbol{a}| := \sqrt{<\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}>}$), dann gilt:

$$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>^2 \quad \leq \quad |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$$

für alle Vektoren $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in V$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ linear abhängig sind.

1.1.2 Beweis

Man betrachte die folgende quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned}
|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 &= <\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}> \\
&= <\lambda\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{a}> + <\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> + <\boldsymbol{b},\lambda\boldsymbol{a}> + <\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}> \\
&= \lambda^2|\boldsymbol{a}|^2 + 2\lambda <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> + |\boldsymbol{b}|^2
\end{aligned}$$

in der Variable λ. Falls $\boldsymbol{a} = 0$ oder $\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$ so gilt trivialerweise die Gleichheit in der obigen Ungleichung. Sind $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ jedoch linear unabhängig so gilt:

$$\lambda^2|\boldsymbol{a}|^2 + 2\lambda <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> + |\boldsymbol{b}|^2 = |\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 > 0 \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Daraus kann man Folgendes herleiten:

$$\text{Angenommen } \lambda^2|\boldsymbol{a}|^2 + 2\lambda <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> + |\boldsymbol{b}|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{-2<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> \pm \sqrt{4<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>^2 - 4|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2}}{2|\boldsymbol{a}|^2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{-<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> \pm \sqrt{<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2}}{|\boldsymbol{a}|^2}$$

Da es aber keine reellen Nullstellen geben, kann muss $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 < 0$ gelten und damit die Behauptung. □

1.2 Ungleichung vom harmonischen, geometrischen und arithmetischen Mittel

Die nächste Ungleichung die behandelt wird, ist die Ungleichung vom harmonischen, geometrischen und arithmetischen Mittel. Hierzu werden gleich zwei äußerst elegante Beweise vorgestellt. Der erste von ihnen wird Cauchy zugeschrieben und ist ein etwas ungewöhnlicher Induktionsbeweis, der zweite geht auf den deutschen Mathematiker Horst Alzer zurück.

1.2.1 Formulierung

Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen, dann gilt:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

wobei Gleichheit dann und nur dann eintritt, wenn alle a_i gleich sind.

1.2.2 Beweis 1

Wie bereits erwähnt, wird die Aussage induktiv bewiesen. Wir betrachten zunächst die rechte Seite der Ungleichung in folgender Form:

$$a_1 \ldots a_n \leq \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n$$

<u>Induktionsbeginn ($n=2$):</u>

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &\leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \\ a_1 a_2 &\leq \frac{a_1^2+2a_1a_2+a_2^2}{4} \Leftrightarrow \\ 0 &\leq a_1^2-2a_1a_2+a_2^2 \Leftrightarrow \\ 0 &\leq (a_1-a_2)^2 \end{aligned}$$

<u>Induktionsschritt:</u>

Der Induktionsschritt erfolgt in zwei Schritten:

- $P(n) \Rightarrow P(n-1)$
- $P(n)$ und $P(2) \Rightarrow P(2n)$

aus denen schließlich die vollständige Behauptung folgt.

<u>Zum ersten der beiden Punkte:</u>

Setze $A = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}$, dann gilt:

$$(\prod_{k=1}^{n-1} a_k)A \overset{P(n)}{\leq} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k + A}{n}\right)^n = \left(\frac{(n-1)A + A}{n}\right)^n = A^n$$

Beide Seiten mit $\frac{1}{A}$ (man nimmt an, dass nicht alle $a_i = 0$ sind, das sonst trivialerweise die Ungleichung gilt) multiplizieren gibt:

$$\prod_{k=1}^{n-1} a_k \leq A^{n-1} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1}\right)^{n-1}$$

<u>Zum zweiten Punkt:</u>

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=n+1}^{2n} a_k\right) \overset{P(n)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right)^n \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{n}\right)^n &= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right)\left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{n}\right)\right)^n \\ &\overset{P(2)}{\leq} \left(\left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{n}}{2}\right)^2\right)^n \\ &= \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2n}\right)^{2n}\end{aligned}$$

Um nun noch die zweite Seite der Ungleichung zu zeigen, ersetzt man einfach in der ersten $a_1, \dots, a_n$ durch $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$.

Angenommen $\frac{a_1+\dots+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$. Man kann o.B.d.A annehmen, dass n gerade ist. Falls nämlich $n = 2k-1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ definiert man einfach $a_{2k} := \frac{a_1+\dots+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$ und es folgt

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + \dots a_{n+1}}{n+1} &= \frac{a_1 + \dots a_n + \frac{a_1+\dots+a_n}{n}}{n+1} \\ &= \frac{(1+\frac{1}{n})(a_1 + \dots + a_n)}{n+1} \\ &= \frac{(\frac{n+1}{n})(a_1 + \dots + a_n)}{n+1} \\ &= \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \\ &= ((a_1 \dots a_n)^{\frac{n+1}{n}})^{\frac{1}{n+1}} \\ &= ((a_1 \dots a_n)^{1+\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n+1}} \\ &= (a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n+1}}((a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n}\sqrt[n+1]{a_{n+1}} \\ &= \sqrt[n+1]{a_1 \dots a_{n+1}}\end{aligned}$$

Für gerade n gilt die Gleichheit sowieso. Sei also im Folgenden $n = 2k$. Nun definiert man $u := \frac{a_1+\cdots+a_k}{k}$ und $v := \frac{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}{k}$ und es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{u+v}{2} &= \frac{a_1+\cdots+a_{2k}}{2k} \\
&= \sqrt[2k]{a_1\ldots a_{2k}} \\
&= \sqrt{(a_1\ldots a_k)^{\frac{1}{k}}(a_{k+1}\ldots a_{2k})^{\frac{1}{k}}} \\
&\leq \sqrt{\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\,\frac{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}{k}} \\
&= \sqrt{uv} \\
&\leq \frac{u+v}{2}
\end{aligned}$$

Also müssen alle Ungleichheiten Gleichheiten sein und damit folgt wiederum

$$\begin{aligned}
\sqrt{uv} &= \frac{u+v}{2} \\
uv &= \frac{u^2+2uv+v^2}{4} \\
0 &= u^2-2uv+v^2 = (u-v)^2
\end{aligned}$$

Daher muss $u = v$ gelten. Nimmt man nun an, dass alle a_i geordnet sind also $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2k}$ und nicht alle gleich, dann muss $u < v$ gelten, was aber ein Widerspruch wäre.

□

1.2.3 BEWEIS 2

Dieser Beweis liefert eigentlich eine stärkere Ungleichung als jene vom arithmetischen und geometrischen Mittel. Tatsächlich kann man nämlich zeigen, dass sogar Folgendes gilt:

Für beliebige positive Zahlen $a_1,\ldots,a_n$ und $p_1,\ldots,p_n$ mit $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ gilt:

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\ldots a_n^{p_n} \leq p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n$$

Im Folgenden wird G für den Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung verwendet und A für jenen auf der Rechten. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die a_i's aufsteigend geordnet sind, also $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ gilt. Man sieht leicht, dass $a_1 \leq G \leq a_n$ gelten muss und daher exisitert ein k mit $a_k \leq G \leq a_{k+1}$. Daraus folgt nun:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \int_{a_i}^{G}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{G}\right)\mathrm{d}t \quad + \quad \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i}\left(\frac{1}{G}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \quad \geq \quad 0 \tag{1.1}$$

da

$$a_i \leq G \quad \forall\, i \in \{1,\dots,k\} \quad \text{und} \quad \frac{1}{t} - \frac{1}{G} = \frac{G-t}{Gt} \geq 0 \quad \text{im Intervall } (a_i, G)$$

und

$$a_i \geq G \quad \forall\, i \in \{k+1,\dots,n\} \quad \text{und} \quad \frac{1}{G} - \frac{1}{t} = \frac{t-G}{Gt} \geq 0 \quad \text{im Intervall } (G, a_i)$$

Nun erhält man aus 1.1:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} p_i \int_{a_i}^{G} \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{k} p_i \int_{a_i}^{G} \frac{1}{G}\mathrm{d}t \quad + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{G}\mathrm{d}t - \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \quad &\geq \quad 0 \Leftrightarrow \\
\sum_{i=1}^{k} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{G}\mathrm{d}t + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{G}\mathrm{d}t - \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{t}\mathrm{d}t + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \right) \quad &\geq \quad 0 \Leftrightarrow \\
\sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{G}\mathrm{d}t \quad &\geq \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Die linke Seite aufintegriert ergibt:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{a_i - G}{G} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i a_i}{G} - \sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{A}{G} - 1$$

während die rechte Seite aufintegriert ergibt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i (\log a_i - \log G) &= \sum_{i=1}^{n} \log(a_i^{p_i}) - \sum_{i=1}^{n} p_i \log(G) \\
&= \log\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \right) - \log(G) \\
&= \log(G) - \log(G) = 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt also insgesamt $\frac{A}{G} - 1 \geq 0$ also $A \geq G$. Falls nun $A = G$ gelten sollte, muss 1.1 null ergeben. Also müssen alle Integrale in 1.1 gleich null sein und dies ist nur der Fall, falls $a_i = G \quad \forall\, i \in \{1,\dots,n\}$, da die Integranten alle größer gleich null sind. □

2 Anwendung der Ungleichungen

Als nächstes wird auf die Anwendung der beiden Ungleichungen eingegangen und welche interessanten Aussagen durch diese gezeigt werden können.

2.1 Satz von Laguerre

Bei dem ersten Satz handelt es sich um ein schönes Resultat in der Theorie der Polynome, das erstmals von Laguerre bewiesen wurde.

2.1.1 Formulierung

Satz von Laguerre
Angenommen die Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

sind alle reell. Dann liegen sie in dem abgeschlossenen Intervall mit den Eckpunkten

$$-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}$$

2.1.2 Beweis

Sei y eine Nullstelle von p und mit $y_1, \ldots, y_{n-1}$ bezeichne man die Restlichen. Dann kann p in der Form $p(x) = (x-y)(x-y_1)\ldots(x-y_{n-1})$ geschrieben werden. Multipliziert man die Linearfaktoren aus, kann man erkennen, dass

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= y + y_1 + \cdots + y_{n-1} \\ a_{n-2} &= y(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + \sum_{i<j} y_i y_j \end{aligned}$$

gelten muss und daher

$$\begin{aligned} a_{n-1}^2 &= y^2 + 2y(y_1 + \cdots + y_{n-1}) + \underbrace{2\sum_{i<j} y_i y_j + \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}_{(y_1+\cdots+y_{n-1})^2} \\ a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \end{aligned}$$

Wendet man nun die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung auf die beiden Vektoren $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$ und $\boldsymbol{1} = (1, \dots, 1)$ mit $n-1$ Einträgen an, erhält man:

$$\begin{aligned}(a_{n-1}+y)^2 = (y_1 + \dots + y_{n-1})^2 = < \boldsymbol{1}, \boldsymbol{y} >^2 \le |\boldsymbol{1}|^2 |\boldsymbol{y}|^2 = (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \\ = (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2)\end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und ausquadrieren beider Seiten gibt:

$$\begin{aligned}a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}y + y^2 \le (n-1)a_{n-1}^2 - 2(n-1)a_{n-2} - (n-1)y^2 \Leftrightarrow \\ ny^2 + 2a_{n-1}y - (n-2)a_{n-1}^2 + 2(n-1)a_{n-2} \le 0 \Leftrightarrow \\ y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n} y + \frac{2(n-1)}{n} a_{n-2} - \frac{n-2}{n} a_{n-1}^2 \le 0\end{aligned}$$

Faktorisiert man dieses Polynom in y nun in $(y-k_1)(y-k_2)$, so erhält man für k_1 und k_2

$$\begin{aligned}k_{1,2} &= -\frac{a_{n-1}}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{n-1}}{n}\right)^2 - \frac{2(n-1)}{n} a_{n-2} + \frac{n-2}{n} a_{n-1}^2} \\ &= -\frac{a_{n-1}}{n} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2 + n^2 a_{n-1}^2 - 2n a_{n-1}^2}{n^2} - \frac{2(n-1)}{n} a_{n-2}} \\ &= -\frac{a_{n-1}}{n} \pm \sqrt{\frac{(n^2 - 2n + 1) a_{n-1}^2}{n^2} - \frac{2(n-1)}{n} a_{n-2}} \\ &= -\frac{a_{n-1}}{n} \pm \sqrt{\frac{(n-1)^2 a_{n-1}^2}{n^2} - \frac{2(n-1)}{n} a_{n-2}} \\ &= -\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n} \sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} a_{n-2}}\end{aligned}$$

Da $(y-k_1)(y-k_2) \le 0$ gelten muss und $k_1 < k_2$ gilt, folgt daraus $y \ge k_1 \wedge y \le k_2$ und da y beliebig gewählt wurde, damit die Behauptung. □

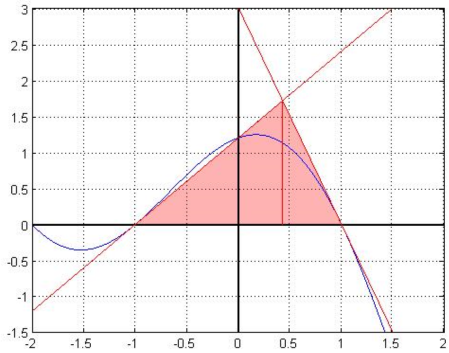
2.2 Satz von Erdős und Gallai

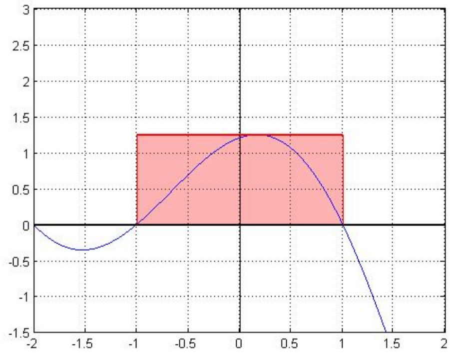
Die nächste Anwendung geht zurück auf die beiden Mathematiker Erdős und Gallai. Bei dem Beweis des von ihnen formulierten Satzes, handelte es sich zunächst um einen geschickten Induktionsbeweis, doch George Pólya erklärte, wie die erste Ungleichung auch mit der Ungleichung des arithmetischen und geometrischen Mittels bewiesen werden kann.

2.2.1 Vorbereitung

Um den nächsten Satz zu formulieren, müssen zuerst die Begriffe tangentiales Dreieck sowie tangentiales Rechteck geklärt werden. Des weiteren werden Formeln für die jeweiligen Flächeninhalte angegeben und der Satz von Erdős und Gallai motiviert.

Definition: Sei $p(x)$ ein Polynom mit $p(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,1)$ und $p(-1) = p(1) = 0$ dann assozieren wir das *tangentiale Dreieck* und das *tangentiale Rechteck* wie in den beiden Skizzen.





Die Flächen der beiden Objekte werden auf folgende Weise ermittelt:

Fläche des tangentialen Rechtecks:
Sei $p(x)$ ein Polynom mit $p(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,1)$ und $p(-1) = p(1) = 0$ dann ist die Fläche des tangentialen Rechtecks gegeben durch:

$$R = 2p(b)$$
$$\text{wobei } b \text{ sodass} p(b) = \max_{x \in (-1,1)} p(x)$$

Fläche des tangentialen Dreiecks:
Sei $p(x)$ ein Polynom mit $p(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,1)$ und $p(-1) = p(1) = 0$ dann ist die Fläche des tangentialen Dreiecks gegeben durch:

$$T = \begin{cases} 0 & \text{falls } p'(1) = p'(-1) = 0 \\ \frac{2p'(1)p'(-1)}{p'(1)-p'(-1)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Erläuterung:
Man kann leicht sehen, dass die Fläche des tangentialen Dreiecks genau y_0 sein muss, falls (x_0, y_0) der Schnittpunkt der beiden Tangenten ist. Die Gleichungen der Tangenten sind gegeben durch $y = p'(-1)(x+1)$ und $y = p'(1)(x-1)$. Daraus folgert man leicht, dass $x_0 = \frac{p'(1)+p'(-1)}{p'(1)-p'(-1)}$ gelten muss und somit $y_0 = p'(1)\left(\frac{p'(1)+p'(-1)}{p'(1)-p'(-1)} - 1\right) = \frac{2p'(1)p'(-1)}{p'(1)-p'(-1)}$. Im Fall $p'(1) = p'(-1) = 0$ kollabiert das Dreieck zu einer Gerade und damit ist die Fläche null. Der Fall

$p'(1) = p'(-1) \neq 0$ kann unter gegebenen Vorraussetzungen nicht eintreten, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma

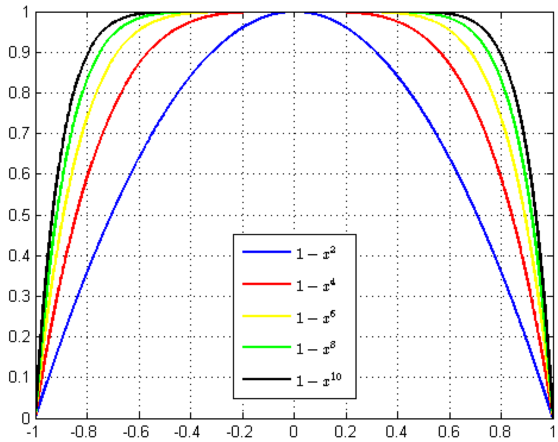
Sei $p \in P_n$ mit $p(-1) = p(1) = 0$ und $p'(-1) = p'(1) \neq 0$ dann folgt $\exists x \in (-1,1)$ sodass $p(x) < 0$

Beweis:
Angenommen $\exists p \in P_n$ mit $p(-1) = p(1) = 0$ und $p'(-1) = p'(1) \neq 0$ und $p(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,1)$. Man nehme o.B.d.A an, dass $p'(-1) = p'(1) > 0$ und stelle p in der Form $p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + R_2^p(x,1)$ dar, wobei $R_2^p(x,1) = \int_1^x \frac{(x-t)^2}{2} p''(t)\mathrm{d}t$ das Lagrange Restglied darstellt. Sei nun $\epsilon \in (0,1)$, dann folgt $p(1-\epsilon) = p'(1)(-\epsilon) - \int_{1-\epsilon}^1 \frac{(1-\epsilon-t)^2}{2} p''(t)\mathrm{d}t$. Durch partielle Integration erhält man:

$$
\begin{aligned}
p(1-\epsilon) &= p'(1)(-\epsilon) - \int_{1-\epsilon}^1 \frac{((1-\epsilon)-t)^2}{2} p''(t)\mathrm{d}t \\
&= p'(1)(-\epsilon) - \int_{1-\epsilon}^1 \frac{(1-\epsilon)^2 - 2(1-\epsilon)t + t^2}{2} p''(t)\mathrm{d}t \\
&= p'(1)(-\epsilon) - \left(\left(p'(t)\frac{(1-\epsilon)^2 - 2(1-\epsilon)t + t^2}{2}\right)_{1-\epsilon}^1 - \int_{1-\epsilon}^1 (t-1+\epsilon)p'(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= p'(1)(-\epsilon) - \left(\left(p'(1)\frac{\epsilon^2}{2} + 0\right) - \int_{1-\epsilon}^1 (t-1+\epsilon)p'(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= \left(-\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}\right)p'(1) + \int_{1-\epsilon}^1 (t-1+\epsilon)p'(t)\mathrm{d}t \\
&= \left(-\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}\right)p'(1) + \left((p(t)(t-1+\epsilon))_{1-\epsilon}^1 - \int_{1-\epsilon}^1 p(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= \underbrace{\underbrace{\left(-\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}\right)}_{<0}\underbrace{p'(1)}_{>0}}_{<0} - \underbrace{\int_{1-\epsilon}^1 \underbrace{p(t)}_{>0}\mathrm{d}t}_{>0} \quad < 0 \quad \lightning \text{ zu } p(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,1)
\end{aligned}
$$

$\square$

Motivation:
Gesucht sind Schranken für $\frac{T}{A}$ und $\frac{R}{A}$ wobei A die Fläche unter der Kurve in $(-1,1)$ des gegebenen Polynoms ist, also $A = \int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x$ und R und T die Flächen des tangentialen Rechtecks und des tangentialen Dreiecks. Betrachtet man beispielsweise die Polynome $p_n(x) = 1 - x^{2n}$:



so gilt $A = \frac{4n}{2n+1}, T = 2n$ und $R = 2$ und daher $\frac{T}{A} > n$ und $\frac{R}{A} = \frac{2n+1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ also erhält man als Schranken lediglich $\frac{T}{A} < \infty$ und $\frac{R}{A} \geq 1 \Leftrightarrow R \geq A$. Diese Resultat ist jedoch nicht befriedigend und es stellt sich die Frage, unter welchen zusätzlichen Bedingungen interessantere Schranken gefunden werden können.

2.2.2 Formulierung

Satz von Erdős und Gallai
Sei $p(x)$ ein reelles Polynom vom Grad $n \geq 2$ mit $p(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,1)$ und $p(-1) = p(1) = 0$, dessen Nullstellen alle reell sind, dann gilt:

$$\frac{2}{3}T \leq A \leq \frac{2}{3}R$$

Gleichheit gilt in beiden Fällen genau dann, wenn $n = 2$.

2.2.3 Beweis

Wie bereits erwähnt lässt sich die linke Ungleichung mit Hilfe der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel zeigen.
Dies gelingt wie folgt: Da p nur reelle Nullstellen besitzt, von denen keine im Intervall $(-1,1)$ liegt, kann man p folgendermaßen darstellen.

$$p(x) = L(1-x^2)\prod_i(\alpha_i - x)\prod_j(\beta_j + x) \tag{2.1}$$

wobei $L > 0$ der Leitkoeffizient des Polynoms p ist und $\alpha_i, \beta_j \geq 1$ gilt. Die Fläche A kann somit wie folgt berechnet werden:

$$\frac{1}{L}A = \int_{-1}^{1} (1-x^2) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) \mathrm{d}x$$

Durch die Substitution $x = -\tilde{x}$ erhält man

$$\frac{1}{L}A = \int_{-1}^{1} (1-\tilde{x}^2) \prod_i (\alpha_i + \tilde{x}) \prod_j (\beta_j - \tilde{x}) \mathrm{d}\tilde{x}$$

und somit

$$\frac{1}{L}A = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \left((1-x^2) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) + (1-x^2) \prod_i (\alpha_i + x) \prod_j (\beta_j - x) \right) \mathrm{d}x$$

Der Ausdruck im Integral stellt nun den arithmetischen Mittelwert zweier Zahlen größer null dar und kann daher mit der bereits bekannten Ungleichung folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
&\geq \int_{-1}^{1} (1-x^2) \sqrt{\prod_i (\alpha_i^2 - x^2) \prod_j (\beta_j^2 - x^2)} \mathrm{d}x \\
&\geq \int_{-1}^{1} (1-x^2) \sqrt{\prod_i (\alpha_i^2 - 1) \prod_j (\beta_j^2 - 1)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3} \sqrt{\prod_i (\alpha_i^2 - 1) \prod_j (\beta_j^2 - 1)} \quad \text{da} \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \mathrm{d}x = \left(x - \frac{x^3}{3} \right)_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Nun berechnet man $p'(-1)$ und $p'(1)$, wobei angenommen werden kann, dass beide ungleich null sind, da ansonsten $T = 0$ gelten würde und damit die Ungleichung trivialerweise erfüllt wäre.

$$\begin{aligned}
p'(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{p(x) - p(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{p(x)}{x-1} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{L(1-x)(1+x) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x)}{x-1} \\
&= \lim_{x \to 1} -L(1+x) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) \\
&= -2L \prod_i (\alpha_i - 1) \prod_j (\beta_j + 1) \\
p'(-1) &= 2L \prod_i (\alpha_i + 1) \prod_j (\beta_j - 1) \text{ erhält man analog}
\end{aligned}$$

Man sieht nun

$$-p'(1)p'(-1) = 4L^2 \prod_i (\alpha_i^2 - 1) \prod_j (\beta_j^2 - 1)$$

$$\sqrt{-p'(1)p'(-1)} = 2L \sqrt{\prod_i (\alpha_i^2 - 1) \prod_j (\beta_j^2 - 1)}$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{1}{L}A &\geq \frac{4}{3}\frac{\sqrt{-p'(1)p'(-1)}}{2L} \Leftrightarrow \\ A &\geq \frac{2}{3}\sqrt{-p'(1)p'(-1)}\end{aligned}$$

Wendet man nun die Ungleichung vom harmonischen und geometrischen Mittel auf $-p'(1) \geq 0$ und $p'(-1) \geq 0$, an so erhält man

$$A \geq \frac{2}{3}\frac{2}{\frac{1}{-p'(1)} + \frac{1}{p'(-1)}} = \frac{4}{3}\frac{p'(1)p'(-1)}{p'(1) - p'(-1)} = \frac{2}{3}T$$

Eine nähere Betrachtung des Falls in dem Gleichheit in all diesen Ungleichungen gilt, ergibt sofort die zweite Behauptung des Satzes. □

2.3 Satz von Mantel

Wie man sieht, ist die Analysis voll von Ungleichungen. Doch das nächste Anwendungsbeispiel zeigt, dass sie auch in der Graphentheorie von Bedeutung sind. Der Beweis des nächsten Satzes, bei dem es sich streng genommen um eine stark vereinfachte Form des Satzes von Turan handelt, wird auf zwei Arten geführt, wobei einer die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel braucht und der andere mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung geführt wird.

2.3.1 Vorbereitung

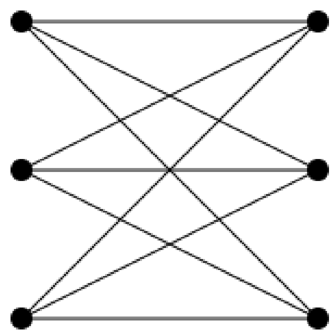
Um den Satz zu formulieren, braucht man aber zuerst noch den Begriff des vollständig bipartiten Graphen.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph, dann heißt G *bipartit* falls gilt:

(i) $\exists A, B \subset V: \quad A \dot{\bigcup} B = V$ und $\forall v_i v_j \in E \Rightarrow (v_i \in A \wedge v_j \in B) \vee (v_i \in B \wedge v_j \in A)$

G heißt *vollständig bipartit* falls (i) gilt und

$$\forall v_i \in A \text{ und } v_j \in B: \quad v_i v_j \in E$$



Beispiel für einen vollständig bipartiten Graphen

2.3.2 Formulierung

Satz von Mantel
Sei G ein Graph mit n Ecken ohne Dreiecke. Dann hat G höchstens $\frac{n^2}{4}$ Kanten, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn n gerade ist und G der vollständig bipartite Graph $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.

2.3.3 Beweis 1

Sei $V = \{1,\dots,n\}$ die Eckenmenge und E die Kantenmenge von G. Mit d_i bezeichnen wir den Grad der Ecke i. Es gilt $\sum_{i\in V} d_i = 2|E|$, was man einfach durch doppeltes Abzählen der Menge $S \subset V \times E$ erhält, wobei $(v,e) \in S$ genau dann, wenn die Ecke v ein Endpunkt der Kante e ist. Weiters sieht man einfach, dass $d_i + d_j \le n$ gelten muss. Wäre nämlich $d_i + d_j > n$ würde das bedeuten, dass die Ecken i und j mit mehr als n Ecken durch Kanten verbunden sind, was zur Folge hätte, dass mindestens eine Ecke mit beiden durch eine Kante verbunden ist und somit ein Dreieck entstehen würde. Somit folgt

$$\sum_{ij\in E} d_i + d_j \le n|E|$$

Da d_i die Anzahl der Kanten angibt, die von der Ecke i ausgehen, sieht man, dass jedes d_i genau d_i mal in der Summe vorkommt und daher gilt

$$n|E| \ge \sum_{ij\in E} d_i + d_j = \sum_{i\in V} d_i^2$$

Definiert man nun die Vektoren $\boldsymbol{d} = (d_1,\dots,d_n)$ und $\boldsymbol{1} = (1,\dots,1)$ so gilt $|\boldsymbol{d}|^2 = \sum_{i\in V} d_i^2$ und $|\boldsymbol{1}|^2 = n$. Daher folgt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$n|E| \ge \sum_{i\in V} d_i^2 \ge \frac{(\sum d_i)^2}{n} = \frac{4|E|^2}{n} \tag{2.2}$$

und somit

$$|E| \le \frac{n^2}{4}$$

Falls Gleichheit vorliegt sind in 2.2 alle Ungleichungen Gleichungen und da die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung nur dann eine Gleichung ist, falls die Vektoren linear abhängig sind, folgt $\boldsymbol{d} = \lambda\boldsymbol{1}$ und damit insbesondere $d_i = d_j \quad \forall i$ und j. Aus $\sum_{i\in V} d_i = 2|E| = \frac{n^2}{2}$ kann man nun folgern, dass $d_i = \frac{n}{2} \quad \forall i$ gelten muss. Mit diesen Eigenschaften kann es sich bei G nur um den vollständig bipartiten Graphen $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ handeln, wie das folgende Lemma zeigen wird. □

<u>Lemma</u>
Sei $G = (V,E)$ ein einfacher Graph mit n Ecken der keine Dreiecke enthält und es gelte $|E| = \frac{n^2}{4}$ und $d_i = \frac{n}{2} \quad \forall i$, dann muss G der vollständig bipartite Graph $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ sein.

Beweis:
Sei i ein beliebiger Knoten in V, dann bilden die Nachbarn von i eine Menge A von Knoten, innerhalb derer keine Kanten verlaufen, da G sonst Dreiecke enthalten würde. Da nach Voraussetzung aber $d_i = \frac{n}{2} \quad \forall i$ gilt, muss jeder Knoten in A mit den verbleibenden $\frac{n}{2}$ Knoten in G verbunden sein. Bei G handelt es sich nun um einen einfachen Graphen, also insbesondere um einen ungerichteten Graphen, daher muss also auch jeder der $\frac{n}{2}$ Knoten in $V \setminus A$ mit jeden in A verbunden sein, woraus sich auch ergibt, dass innerhalb von $V \setminus A$ keine Kanten verlaufen. Somit kann es sich bei G nur um den vollständig bipartiten Graphen $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ handeln.

2.3.4 BEWEIS 2

Für den zweiten Beweis müssen wir noch den Begriff der unabhängigen Menge definieren.

<u>Definition:</u> Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Eine Menge $U \subset V$ heißt unabhängig falls für je zwei Knoten in U gilt, dass sie nicht benachbart sind.

Mit dieser Definition lautet nun der zweite Beweis wie folgt:
Sei α die maximale Größe einer unabhängigen Menge A und $\beta = n - a$. Da G keine Dreiecke enthält, bilden alle Nachbarn einer Ecke i eine unabhängige Menge und daher gilt sicher $d_i \leq \alpha \quad \forall i$. Sei nun $B = V \setminus A$, dann existiert zu jeder Kante aus G mindestens ein Endknoten in B. Zählt man nun die Kanten von G, so erhält man, dass $|E| \leq \sum_{i \in B} d_i$ gilt. Aus der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel folgt nun

$$|E| \leq \sum_{i \in B} d_i \leq \alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

$\square$