Der Satz von Turán

Seminar aus Reiner Mathematik WS 13/14

Johannes Brantner

12. November 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort **3**

2 Einleitung **4**

3 Die Formulierung des Satzes **5**

4 Die Beweise (Teil 1) **6**
4.1 Erster Induktionsbeweis (Pál Turán) 6
4.2 Beweis mittels Optimierung: Gewichte bewegen 7
4.3 Beweis mittels Wahrscheinlichkeitstheorie 8

5 Turán Graphen **11**

6 Die Beweise (Teil 2) **15**
6.1 Zweiter Induktionsbeweis (Pál Erdös) 15
6.2 Ein Graphentheoretischer Beweis 15

1 Vorwort

Die vorliegende Seminararbeit entstand im Rahmen der Lehrveranstaltung „Seminar aus Reiner Mathematik“ im Wintersemester 2013/14. Zum Inhalt hat sie einen Satz aus der extremalen Graphentheorie, wobei der Fokus weniger auf das Resultat an sich gerichtet ist, als auf den Beweis des selbigen. Inhaltlich orientiert sie sich stark am Kapitel 36 aus *Das BUCH der Beweise* von Martin Aigner und Günter Ziegler.

In der Einleitung finden sich grundlegende graphentheoretische Definitionen. An dieser Stelle sei bemerkt, dass die Aussage des Satzes von Turán sich nur auf endliche, einfache Graphen bezieht. Deshalb habe ich darauf verzichtet, Graphen in ihrer allgemeinsten Form zu definieren. Die verwendete Definition reicht völlig aus, um sich mit der Problemstellung sinnvoll auseinanderzusetzen. Nach der Formulierung (siehe Die Formulierung des Satzes, Seite 5) und den ersten drei Beweisen (Die Beweise (Teil 1), ab Seite 6) folgt ein Abschnitt (Turán Graphen, siehe Seite 11), der eine spezielle, für den Satz (und die folgenden Beweise) relevante Klasse von Graphen beschreibt und untersucht. Im letzten Abschnitt wird dann ein Resultat aus dem Kapitel über Turán Graphen in zwei weiteren Beweisen für den Satz von Turán verwendet.

2 Einleitung

Definition 1. *Sei $V = \{v_1, ..., v_n\}$ eine endliche Menge, $E \subseteq \{K \subseteq V : |K| = 2\}$. Dann heißt das Tupel $G = (V, E)$ ein* einfacher Graph *mit* Eckenmenge *V und* Kantenmenge *E. Notation: Statt $\{v_i, v_j\} \in E$ schreiben wir $v_i v_j \in E$. Ist $v_i v_j \in E$, so nennen wir v_i und v_j* benachbart*.*

Anschaulich gesprochen beschreibt ein Graph eine Menge von Objekten (die Ecken), die auf irgendeine Art verbunden sind. (Zum Beispiel eine Menge von Studierenden, wobei zwei Studierende als verbunden angesehen werden, wenn sie dasselbe Studium betreiben.) Eine besondere Klasse von Graphen bilden die vollständigen Graphen:

Definition 2. *Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. G heißt* vollständig*, falls $|E|$ maximal ist. (In diesem Fall gilt: $|E| = \binom{|V|}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$)*

In einem vollständigen Graphen sind je zwei Ecken durch eine Kante verbunden.
Die folgende Definition beschreibt eine Unterstruktur von Graphen:

Definition 3. *Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Sei $U \subseteq V$ und $H = (U, F)$ ein Graph. Falls*

$$\forall u_i, u_j \in U : u_i u_j \in F \iff u_i u_j \in E$$

nennen wir $H = (U, F)$ einen Untergraph *von G. Ein vollständiger Untergraph von G mit p Ecken heißt* p-Clique *in G.*

Das heißt, ein Untergraph ist ein Graph, den man aus einem gegebenen Graphen erhält, wenn man eine Teilmenge der Eckenmenge wählt und alle assoziierten Kanten mitübernimmt.

3 Die Formulierung des Satzes

Mit den oben erarbeiteten Begriffen kann man die Frage, deren Antwort der Satz von Turán liefert, formulieren: *Wenn ein einfacher Graph mit n Ecken keine p-Clique enthält, wie viele Kanten kann er dann höchstens haben?*

Es ist möglich, zu gegebenen n, p Graphen zu konstruieren, die genau n Ecken und $\left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}$ Kanten besitzen, aber keine p-Clique enthalten. Diese speziellen Graphen und deren Konstruktion werden an späterer Stelle (siehe Seite 11) behandelt. Die Existenz solcher Graphen zeigt, dass der Satz von Turán die schärfste Abschätzung für die Kantenanzahl eines einfachen Graphen mit n Ecken, der keine p-Clique enthält, liefert.

Satz 1. *Seien $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq p$. Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph mit n Ecken der keine p-Clique enthält. Dann gilt:*

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2} \tag{3.1}$$

Falls $p = 2$ ist, dann bedeutet die Voraussetzung, G enthalte keine 2-Cliquen, dass $E = \emptyset$. Wäre $v_i v_j \in E \Rightarrow \{v_i, v_j\}$ bilden eine 2-Clique, im Widerspruch zur Annahme. (3.1) reduziert sich somit auf $0 \leq 0$, eine wahre Aussage. Die folgenden Beweise verwenden Methoden aus unterschiedlichen Gebieten der Mathematik.

4 Die Beweise (Teil 1)

Der erste Beweis wird Pál Turán zugeschrieben. Er beruht auf dem Prinzip der vollständigen Induktion.

4.1 Erster Induktionsbeweis (Pál Turán)

Beweis von Satz 1, 1. Variante. Sei zunächst $n \leq p-1$. Dann gilt:

$$\begin{array}{ll} \frac{n(n-1)}{2} & \leq (1-\frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2} \quad \Longleftrightarrow \\ n-1 & \leq (1-\frac{1}{p-1})n \quad \Longleftrightarrow \\ 1-\frac{1}{n} & \leq 1-\frac{1}{p-1} \quad \Longleftrightarrow \\ \frac{1}{n} & \geq \frac{1}{p-1} \quad \Longleftrightarrow \\ n & \leq p-1 \end{array}$$

Mit $|E| \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ folgt die Aussage.

Falls $n \geq p$: Sei $V = \{v_1, ..., v_n\}$. Angenommen die Anzahl der Kanten von G ist maximal unter der Bedingung, dass G keine p-Clique enthält. G enthält (mindestens) eine $(p-1)$-Clique, andernfalls könnte man einfach eine weitere Kante hinzufügen und erhielte einen neuen Graphen, der keine p-Clique enthält, aber mehr Kanten als G enthält, dann wäre also die Anzahl der Kanten von G nicht maximal.

Sei $H = (A, F)$ eine $(p-1)$-Clique in G. Setze $B = V \backslash A$. Es bezeichne e_A die Anzahl der Kanten von G, die Knoten in A miteinander verbinden, analog e_B die Anzahl der Kanten in B und e_{AB} die Anzahl der Kanten zwischen Knoten in A und Knoten in B.

Da A eine $(p-1)$-Clique ist gilt $e_A = \binom{p-1}{2}$. Da $|B| < |G|$ gilt nach Induktion: $e_B \leq \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{(n-(p-1))^2}{2}$. Eine Abschätzung für e_{AB} erhält man durch folgende Überlegung: Jeder Knoten in B kann höchstens zu $(p-2)$ Knoten in A benachbart sein, sonst würde G eine p-Clique enthalten. Also gilt $e_{AB} \leq (p-2)(n-(p-1))$. Fügt man diese Bausteine nun zusammen, erhält man:

$$
\begin{aligned}
|E| = \ & e_A + e_B + e_{AB} \leq \\
& \tfrac{(p-1)(p-2)}{2} + \left(1 - \tfrac{1}{p-1}\right) \tfrac{(n-(p-1))^2}{2} + (p-2)(n-(p-1)) = \\
& \tfrac{(p-1)(p-2)}{2} + \left(\tfrac{p-2}{p-1}\right) \tfrac{(n-(p-1))^2}{2} + (p-2)(n-(p-1)) = \\
& (p-2)\left(\tfrac{p-1}{2} + \tfrac{(n-(p-1))^2}{2(p-1)} + (n-(p-1))\right) = \\
& (p-2)\left(\tfrac{p-1}{2} + \tfrac{n^2-2n(p-1)+(p-1)^2}{2(p-1)} + (n-(p-1))\right) = \\
& (p-2)\left(\tfrac{p-1}{2} + \tfrac{n^2}{2(p-1)} - \tfrac{2n(p-1)}{2(p-1)} + \tfrac{(p-1)^2}{2(p-1)} + (n-(p-1))\right) = \\
& (p-2)\left(\tfrac{p-1}{2} + \tfrac{n^2}{2(p-1)} - n + \tfrac{p-1}{2} + n - (p-1)\right) = \\
& (p-2)\left(\tfrac{p-1}{2} + \tfrac{n^2}{2(p-1)} - \tfrac{p-1}{2}\right) = \tfrac{p-2}{p-1}\tfrac{n^2}{2} = \left(1 - \tfrac{1}{p-1}\right)\tfrac{n^2}{2}
\end{aligned}
$$

□

4.2 Beweis mittels Optimierung: Gewichte bewegen

Im folgenden Beweis wird das Maximum einer Abbildung abgeschätzt. Durch die Darstellung der Kantenanzahl als Funktionswert eines speziellen Punktes im Definitionsbereich der Funktion ergibt sich dann die Ungleichung (3.1).

Beweis von Satz 1, 2. Variante. Sei $S = \{\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i : 0 \leq w_i \leq 1 \wedge \sum_{i=1}^n w_i = 1\}$. Setze

$$f : S \to \mathbb{R}, \mathbf{w} \mapsto \sum_{v_i v_j \in E} w_i w_j$$

In weiterer Folge bezeichnen wir w_i als *Gewicht* von v_i.
Ausgehend von einem beliebigen Punkt $\mathbf{w} \in S$ verschieben wir nun Gewichte und schätzen den Funktionswert $f(\mathbf{w})$ ab: Angenommen v_i, v_j seien zwei nicht benachbarte Ecken mit positiven Gewichten w_i, w_j. Setze $s_i = \sum_{r: v_r v_i \in E} w_r$ die Summe der Gewichte der Nachbarn von v_i. Analog sei s_j die Summe der Gewichte der Nachbarn von v_j. Ohne Einschränkung sei $s_i \geq s_j$. Wir verschieben das Gewicht von v_j nach v_i, das heißt setze $\hat{\mathbf{w}} = (\hat{w}_1, ..., \hat{w}_n)$ mit $\hat{w}_i = w_i + w_j$, $\hat{w}_j = 0$, $\hat{w}_r = w_r$ für $r \neq i, j$. Offenbar gilt $\hat{\mathbf{w}} \in S$. Für den Funktionswert gilt:

$$f(\hat{\mathbf{w}}) = f(\mathbf{w}) + w_j s_i - w_j s_j \geq f(\mathbf{w})$$

Wenn man nun induktiv fortfährt, reduziert sich die Anzahl der Ecken mit positivem Gewicht in jedem Schritt um 1, während der Funktionswert nicht schrumpft. Das Verfahren bricht ab, wenn es keine nicht-benachbarten Ecken mit positiven Gewichten mehr gibt, das heißt, wenn sich alle positiven Gewichte auf Ecken einer k-Clique befinden.

Da f als stetige Funktion auf der kompakten Menge S ihr Maximum annimmt, gibt es nun einen maximierenden Punkt in $\mathbf{w} \in S$. Dieser kann aber nach obiger Überlegung so gewählt werden, dass alle positiven Gewichte in einer k-Clique auftreten. Für diesen Punkt gilt dann aber

$$\forall i \in \{1, ..., n\} : w_i > 0 \implies w_i = \frac{1}{k}$$

Das heißt, alle Ecken mit positivem Gewicht haben dasselbe Gewicht:

Wären $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $w_i > w_j > 0$ so gibt es ein ϵ mit $0 < \epsilon < w_i - w_j$. Setzt man $\hat{w_i} = w_i - \epsilon$, $\hat{w_j} = w_j + \epsilon$ und $\hat{w_r} = w_r$ für $r \neq i, j$ so gilt für den Punkt $\hat{\mathbf{w}} = (\hat{w_1}, ..., \hat{w_n})$:

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathbf{w}}) = & \; f(\mathbf{w}) - w_i w_j + (w_i - \epsilon)(w_j + \epsilon) = \\ & \; f(\mathbf{w}) + \epsilon(w_i - w_j) - \epsilon^2 > f(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{w}$ nicht maximierend, Widerspruch zur Annahme.
Also liegen alle positiven Gewichte von $\mathbf{w}$ in einer k-Clique und sind gleich. ($w_i = \frac{1}{k}$ falls w_i in der Clique liegt, $w_i = 0$ sonst.) Da jede k-Clique genau $\frac{k(k-1)}{2}$ Kanten enthält, kann man den maximalen Funktionswert $f(\mathbf{w})$ nun explizit angeben:

$$f(\mathbf{w}) = \frac{k(k-1)}{2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Da dieser Ausdruck aber mit k steigt, und $k \leq p - 1$ gilt (G enthält keine p-Cliquen!) folgt die Abschätzung

$$f(\mathbf{w}) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

für *alle* $\mathbf{w} \in S$. Also insbesondere für $\mathbf{w} = (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$. Wegen $f(\mathbf{w}) = \frac{|E|}{n^2}$ gilt also:

$$\frac{|E|}{n^2} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

Was zu zeigen war.

□

4.3 Beweis mittels Wahrscheinlichkeitstheorie

Um den nächsten Beweis zu formulieren, sind noch ein paar Begriffe notwendig.

Definition 4. *Sei G ein Graph mit Eckenmenge $V = v_1, ..., v_n$. Die Zahl der Nachbarn von v_i wird der* Grad *von v_i genannt.*

Definition 5. *Sei G ein Graph. Dann heißt die Anzahl der Ecken in einer größten Clique von G die* Cliquenzahl *von G.*

Beweis von Satz 1, 3. Variante. Für $v_i \in V$ bezeichne d_i den Grad von v_i. Sei $\omega(G)$ die Cliquenzahl von G. Wir zeigen nun folgende Ungleichung:

$$\omega(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d_i} \tag{4.1}$$

Dazu sei $\pi \in S_n$ eine zufällige Permutation, wobei jede der $n!$ Permutationen mit der selben Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n!}$ auftritt. Wir definieren $C_\pi \subseteq V$ wobei

$$C_\pi = \{v_{\pi(i)} \in V : \forall j \in \{1, ..., i-1\} : v_{\pi(i)} v_{\pi(j)} \in E\}$$

Nach Definition ist C_π eine Clique in G. Nun untersuchen wir den Erwartungswert EX der Zufallsvariable $X = |C_\pi|$. Dazu stellen wir X als Summe von charakteristischen Zufallsvariablen X_i dar, wobei $X_i = 1$, falls $v_i \in C_\pi$, $X_i = 0$, sonst. Offenbar gilt $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Die Ecke v_i liegt in C_π genau dann, wenn v_i nach der Permutation vor allen $n-1-d_i$ Ecken auftritt, die *nicht* zu v_i benachbart sind. Jede der $n-1-d_i$ Nichtnachbarn und v_i haben die gleiche Chance, nach der Permutation als Erstes aufzutreten, also ist die Wahrscheinlichkeit $P(v_i \in C_\pi) = \frac{1}{n-d_i}$. Damit folgt sofort für den Erwartungswert:

$$EX_i = \frac{1}{n - d_i}$$

Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt also:

$$EX = \sum_{i=1}^n EX_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n - d_i}$$

Behauptung: Es gibt zumindest eine Clique in G, die mindestens EX Elemente enthält, anders gesagt: $EX \leq \omega(G)$. Begründung davon: Wegen $|C_\pi| = X \leq \omega(G)$ für alle $\pi \in S_n$ (C_π ist ja eine Clique!) gilt:

$$EX = \sum_{\pi \in S_n} \frac{1}{n!} |C_\pi| \leq \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \omega(G) = \frac{1}{n!} n! \omega(G) = \omega(G)$$

Also gilt (4.1). Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung erhält man Folgendes:

$$n^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1 \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n - d_i}} \sqrt{n - d_i} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n - d_i} \sum_{i=1}^n n - d_i \leq \omega(G) \underbrace{\sum_{i=1}^n n - d_i}_{n^2 - \sum\limits_{i=1}^n d_i}$$

Wegen der Vorraussetzung $\omega(G) \leq p - 1$ gilt also:

$$n^2 \leq (p-1) \left(n^2 - \sum_{i=1}^n d_i \right) \tag{4.2}$$

Um nun die notwendige Verbindung zur Kantenmenge E zu schaffen, muss der Term $\sum_{i=1}^n d_i$ untersucht werden:

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n |\{v_j \in V : v_i v_j \in E\}| = 2|E|$$

weil jede Kante $v_k v_l$ genau zweimal gezählt wird – einmal wenn $i = k$ und einmal wenn $i = l$. Dies in (4.2) eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned}
n^2 &\leq (p-1)\left(n^2 - 2|E|\right) && \Leftrightarrow \\
-2|E| &\geq \frac{n^2}{p-1} - n^2 && \Leftrightarrow \\
|E| &\leq -\frac{1}{2}\left(n^2\left(\frac{1}{p-1} - 1\right)\right) && \Leftrightarrow \\
|E| &\leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

5 Turán Graphen

Dieser Abschnitt widmet sich einer speziellen Klasse von Graphen. Bezogen auf den Satz von Turán ist es interessant, dass Graphen die dieser Klasse angehören, die Schärfe der Abschätzung (3.1) bestätigen.

Definition 6. *Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. G heißt* multipartit, *falls paarweise disjunkte Mengen V_i, $i = 1, ..., k$ existieren, so, dass $V = V_1 \cup ... \cup V_k$ und*

$$\forall j \in \{1, ..., k\} : u, v \in V_j \Rightarrow uv \notin E$$

Das heißt, zwei Ecken dürfen nur durch eine Kante verbunden sein, wenn sie nicht in der selben Menge V_i liegen.

G heißt ein vollständig multipartiter *Graph, falls*

$$\forall j \in \{1, ..., k\} : \forall u \in V_j : \forall v \in V : v \in V_j \Leftrightarrow uv \notin E$$

gilt. In diesem Fall sind zwei Ecken dann und nur dann verbunden, wenn sie nicht in der selben Menge V_i liegen.

Bemerkung 1. *Ein vollständig multipartiter Graph ist im Allgemeinen nicht vollständig im Sinne von Definition 2 (siehe Seite 4).*

Bemerkung 2. *Die Anzahl der Kanten eines vollständig multipartiten Graphen G ist gegeben durch $\sum_{i<j} |V_i||V_j|$.*

Wenn man zu gegebenem $n \geq p$ einen vollständig multipartiten Graph G ohne p-Clique mit maximaler Kantenanzahl sucht, so gilt es $\sum_{i<j} |V_i||V_j|$ durch eine geeignete Wahl von $V_1, ..., V_k$ zu maximieren.

Behauptung: Das Maximum kann nur erreicht werden, wenn man $k = p - 1$ und V_i, V_j mit $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ für alle i, j wählt.
Beweis davon: Sei O.B.d.A. $|V_i| \geq |V_j| + 2$. Wenn wir eine Ecke aus V_i nach V_j wechseln lassen, so enthält der neue zu den V_k-s gehörige vollständige multipartite Graph

$$(|V_i| - 1)(|V_j| + 1) - |V_i||V_j| = |V_i| - |V_j| - 1 \geq 1$$

Kanten mehr als der ursprüngliche Graph, welcher also keine maximale Kantenanzahl hatte.

Sei nun $k \leq p-2$. Da $n \geq p$ gilt $n-2 \geq k$ und damit existiert ein $i \in \{1, ...k\}$ mit $|V_i| \geq 2$. Sei V_i so, und sei $v \in V_i$. Setze $V_{k+1} = \{v\}$ und $\hat{V}_i = V_i \setminus \{v\}$. Der durch die Partition

$V_1, ..., V_{i-1}, \hat{V}_i, V_{i+1}, ..., V_k, V_{k+1}$ von V festgelegte vollständig multipartite Graph besitzt dann wenigstens $-(k-1)+k=1$ Kante mehr als der ursprüngliche Graph. (Mit der aus V_i entfernten Ecke fallen $k-1$ Kanten weg, aber durch das Hinzufügen der zusätzlichen Menge V_{k+1} erhöht sich die Kantenzahl mindestens um k.) Noch zu Bemerken ist, dass der neue Graph $\hat{G}$ keine p-Cliquen enthält:

$$\omega(\hat{G}) \leq k+1 \leq p-1$$

Definition 7. *Ein vollständig multipartiter Graph G, der die Bedingung $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ erfüllt, heißt* Turán Graph.

Für den Spezialfall, dass $p-1$ n teilt, gilt:

$$\sum_{i<j} |V_i||V_j| = \binom{p-1}{2} \left(\frac{n}{p-1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}$$

Das heißt, der Satz von Turán liefert die schärfste Abschätzung für die Anzahl von Kanten in einem Graphen ohne p-Cliquen. Das folgende Lemma ist ein Spezialfall des Satzes von Turán.

Lemma 1. *Sei $G = (V, E)$ ein vollständig multipartiter Graph, der keine p-Clique enthält ($p \geq 2$). Dann gilt $|E| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}$*

Beweis. Der Fall $p = 2$ wurde in Kapitel 3 behandelt, weshalb wir für die weiteren Überlegungen $p \geq 3$ voraussetzen können. Wegen obiger Überlegung reicht es zu zeigen, dass die Ungleichung hält, falls G ein $(p-1)$-partiter Turán Graph ist. Sei also $V = V_1 \cup ... \cup V_{p-1}$. Setze $n_j = |V_j|$ für $j = 1, ...p-1$. Weil man G als Turán Graph annehmen kann, gilt $|n_i - n_j| \leq 1$ für alle i, j. Das bedeutet aber, dass

$$\exists m \in \mathbb{N} : \forall i : n_i = m \vee n_i = m+1$$

Es bezeichne a die Anzahl der n_i-s, die gleich m sind, b die Anzahl der n_i-s, die gleich $(m+1)$ sind. Der Fall $b = 0$ (das ist der Fall $p-1|n$) wurde bereits behandelt, deshalb sei ohne Einschränkung $b > 0$. Wegen $\sum_{i=1}^{n} n_i = n$ gilt $n = am + b(m+1)$. Weil es insgesamt genau $p-1$ n_i-s gibt, gilt $a + b = p-1$. Aus diesen beiden Gleichungen kann man leicht schließen, dass

$$m = \frac{n-b}{p-1}$$

Es ist ja

$$|E| = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^{p-1} n_i n_j$$

die Summe der Produkte der $n_i n_j$ über alle Paare $\{n_i, n_j\}$ mit $i \neq j$. Diese Produkte haben jeweils einen der drei möglichen Werte $m^2, m(m+1)$ und $(m+1)^2$. Mit den Zahlen a, b können wir explizit angeben, wie oft jeder dieser Summanden auftritt:

$$|E| = \binom{a}{2} m^2 + \binom{b}{2} (m+1)^2 + abm(m+1)$$

Da wir diesen Wert mit $\binom{p-1}{2}\left(\frac{n}{p-1}\right)^2 = \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}$ abschätzen wollen, folgen ein paar Umformungen, die den Ausdruck $\binom{p-1}{2}$ isolieren:

$$\begin{aligned}
|E| =& \binom{a}{2}m^2 + \binom{b}{2}(m+1)^2 + abm(m+1) \\
=& m^2\left(\binom{a}{2} + \binom{b}{2} + ab\right) + \binom{b}{2}(2m+1) + abm \\
=& m^2\binom{p-1}{2} + \binom{b}{2}(2m+1) + abm \\
=& \binom{p-1}{2}\left(m^2 + \frac{2}{(p-1)(p-2)}\left(\binom{b}{2}(2m+1) + abm\right)\right)
\end{aligned}$$

Damit erkennt man:

$$\begin{gathered}
|E| \leq \binom{p-1}{2}\left(\frac{n}{p-1}\right)^2 \Leftrightarrow \\
\left(m^2 + \frac{2}{(p-1)(p-2)}\left(\binom{b}{2}(2m+1) + abm\right)\right) \leq \left(\frac{n}{p-1}\right)^2
\end{gathered}$$

Diese Ungleichung gilt es nun zu verifizieren. In der folgenden Umformung der linken Seite verwenden wir die Identitäten $a+b = p-1$ und $m = \frac{n-b}{p-1}$:

$$\begin{aligned}
\left(m^2 + \frac{2}{(p-1)(p-2)}\left(\binom{b}{2}(2m+1) + abm\right)\right) &= \\
m^2 + \frac{2b}{(p-1)(p-2)}\left(\frac{b-1}{2}(2m+1) + am\right) &= \\
m^2 + \frac{2b}{(p-1)(p-2)}\left(m(b+a-1) + \frac{b-1}{2}\right) &= \\
m^2 + \frac{2b}{(p-1)(p-2)}\left(m(p-2) + \frac{b-1}{2}\right) &= \\
m^2 + \frac{2bm}{(p-1)} + \frac{b(b-1)}{(p-1)(p-2)} &= \\
\frac{(n-b)^2}{(p-1)^2} + \frac{2b(n-b)}{(p-1)^2} + \frac{b(b-1)}{(p-1)(p-2)} &= \\
\frac{n^2 - 2nb + b^2 + 2nb - 2b^2}{(p-1)^2} + \frac{b(b-1)}{(p-1)(p-2)} &= \\
\frac{n^2}{(p-1)^2} - \frac{b^2}{(p-1)^2} + \frac{b(b-1)}{(p-1)(p-2)}
\end{aligned}$$

Daraus folgt also:

$$\begin{gathered}
|E| \leq \binom{p-1}{2}\left(\frac{n}{p-1}\right)^2 \Leftrightarrow \\
\frac{b(b-1)}{(p-1)(p-1)} - \frac{b^2}{(p-1)^2} \leq 0
\end{gathered}$$

An dieser Stelle verwenden wir nun $b > 0$ und dividieren beide Seiten durch b:

$$\begin{aligned}
\tfrac{b(b-1)}{(p-1)(p-1)} - \tfrac{b^2}{(p-1)^2} \leq&\quad 0 &&\Leftrightarrow\\
\tfrac{(b-1)}{(p-1)(p-1)} - \tfrac{b}{(p-1)^2} \leq&\quad 0 &&\Leftrightarrow\\
(b-1)\,(p-1) - b\,(p-2) \leq&\quad 0 &&\Leftrightarrow\\
bp - b - p + 1 - bp + 2 \leq&\quad 0 &&\Leftrightarrow\\
3 \leq&\quad b + p
\end{aligned}$$

Womit wir wegen $b \geq 0$ und $p \geq 3$ am Ende des Beweises angekommen sind. $\square$

6 Die Beweise (Teil 2)

6.1 Zweiter Induktionsbeweis (Pál Erdös)

Der nächste Beweis verwendet wieder Induktion nach der Anzahl der Ecken.

Beweis von Satz 1, 4. Variante. Sei d_j der Grad von v_j, $j = 1, ..., n$. Sei $v_m \in V$ mit $d_m = max_{1 \leq j \leq n} d_j$ eine Ecke mit maximalem Grad. Setze S die Menge aller Nachbarn von v_m, $T := V \setminus S$. G enthält keine p-Cliquen und v_m ist zu allen Ecken in S benachbart. Also enthält S keine $(p-1)$-Cliquen.

Sei H der Graph auf der Eckenmenge V, der folgende Eigenschaften besitzt:

- Auf S hat H genau dieselben Kanten wie G
- H hat alle Kanten zwischen S und T
- H hat keine Kanten innerhalb von T

Der so konstruierte Graph H enthält wieder keine p-Cliquen.
Sei $\hat{d_j}$ der Grad von v_j in H. Falls $v_j \in S$ so gilt $\hat{d_j} \geq d_j$ nach Konstruktion von H. Falls $v_j \in T$ so ist $\hat{d_j} = |S| = d_m \geq d_j$ wegen der Wahl von v_m. Daraus folgt aber für die Kantenmenge $E(H)$ von H: $E(H) \geq |E|$. Also gibt es unter allen Graphen mit maximaler Kantenzahl auch einen mit der Struktur von H. Nach Induktion lässt sich die Anzahl der Kanten des auf S induzierten Graphen durch die Anzahl der Kanten in einem geeigneten Turán Graphen abschätzen, der keine $p-1$-Clique enthält. Wenn man zu diesem Graphen die Eckenmenge T hinzufügt, ist der neue Graph K genau ein $p-1$-partiter Turán Graph. Mit

$$|E| \leq |E(H)| \leq |E(K)|$$

und Lemma 1 folgt die Behauptung. □

6.2 Ein Graphentheoretischer Beweis

Das folgende Lemma liefert eine äquivalente Charakterisierung von vollständig multipartiten Graphen:

Lemma 2. *Ein Graph ist vollständig multipartit dann und nur dann, wenn*

$$u \sim v :\Leftrightarrow uv \notin E$$

eine Äquivalenzrelation definiert. In diesem Fall sind (in der Notation von Definition 6) gerade die V_i-s die Äquivalenzklassen.

Beweis. Angenommen G sei vollständig multipartit wie in Definition 6. Die Reflexivität der Relation $\sim$ folgt sofort, da $\forall v \in V : |\{v,v\}| = 1 \neq 2$ und somit $vv \notin E$. Zur Symmetrie gibt es ähnlich wenig zu sagen: $\{u,v\} = \{v,u\}$, also $uv \notin E \Leftrightarrow vu \notin E$. Zu zeigen bleibt die Transitivität: Seien $u,v,w \in V$ mit $u \sim v$ und $v \sim w$. Sei i so, dass $u \in V_i$ (so ein i existiert, da V die Vereinigung der V_j-s ist).

Nun ist $u \sim v \Rightarrow v \in V_i$ und damit $v \sim w \Rightarrow w \in V_i$. Mit

$$u \sim w \Leftrightarrow uw \notin E \Leftrightarrow w \in V_i$$

folgt die Transitivität. Obige Überlegung zeigt zudem, dass $[u]_\sim = V_i$.

Sei nun andererseits durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert. Seien $V_1, ...V_k$ die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. Diese Mengen sind paarweise disjunkt und ihre Vereinigung gibt ganz V. Zu zeigen bleibt die definierende Eigenschaft eines vollständig multipartiten Graphen.

Sei $j \in \{1,...k\}, u \in V_j, v \in V$.

$$uv \notin E \Leftrightarrow u \sim v \Leftrightarrow v \in V_j$$

Also $uv \notin E \Leftrightarrow v \in V_j$, was zu zeigen war. □

Nun folgt der fünfte und letzte Beweis des Satzes.

Beweis von Satz 1, 5. Variante. Angenommen G habe eine maximale Anzahl von Kanten.

Behauptung: G enthält keine drei Ecken u,v,w mit $vw \in E$ aber $uv \notin E$ und $uw \notin E$. Beweis davon: Angenommen die Behauptung wäre falsch. Seien also $u,v,w \in E$ Ecken, die die Aussage der Behauptung nicht erfüllen. Notation: Es bezeichne $d(v)$ den Grad von v, analog $d(u), d(w)$ die Grade von u, w.

Fall 1: $d(u) < d(v)$ oder $d(u) < d(w)$. Sei ohne Einschränkung $d(u) < d(v)$. Wir erzeugen aus G einen neuen Graphen $\hat{G}$, indem wir u aus der Eckenmenge entfernen und stattdessen eine neue Ecke $\hat{v}$ hinzufügen, die genau dieselben Nachbarn wie v hat. ($v\hat{v} \notin E$).) Der Rest von G bleibt unverändert.

Nun hat $\hat{G}$ auch keine p-Clique und die Anzahl seiner Kanten $E(\hat{G})$ erfüllt:

$$|E(\hat{G})| = |E| + d(v) - d(u) > |E|$$

Ein Widerspruch zur Maximalität von $|E|$.

Fall 2: $d(u) \geq d(v)$ und $d(u) \geq d(w)$. Wieder erzeugen wir einen neuen Graphen $\hat{G}$ aus G. Diesmal durch zweifaches Hinzufügen einer Kopie von u und Entfernen von v und w. Damit bleibt die Anzahl der Ecken in $\hat{G}$ gleich n, $\hat{G}$ hat keine p-Clique und es gilt:

$$|E(\hat{G})| = |E| + 2d(u) - (d(v) + d(w)) - 1 > |E|$$

wobei die -1 dem Entfernen der Kante vw geschuldet ist. Also hat auch der zweite Fall einen Widerspruch erzeugt, die Behauptung hält also.

Die Behauptung liefert aber gerade die Transitivität der Relation $\sim$ definiert durch

$$u \sim v :\Leftrightarrow uv \notin E$$

für $u, v \in V$. Die Reflexivität und Symmetrie der Relation sind klarerweise gegeben, $\sim$, definiert also eine Äquivalenzrelation. Nach dem obigen Lemma ist G also ein vollständig multipartiter Graph mit maximaler Kantenzahl ohne p-Clique, also ein Turán Graph. Die Abschätzung (3.1) folgt mit Lemma 1.

$\square$