Das Nadelproblem von Buffon

Angelika Zuber

Jänner 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

In der vorliegenden Seminararbeit widme ich mich dem Thema des „Nadelproblems von Buffon“. Dieses Problem behandelt zwar eine wahrscheinlichkeitstheoretische Frage, wird aber erst durch das Auftreten der Zahl π interessant. Durch die Lösung des Nadelproblems wird es nämlich möglich, π anzunähern.
Anfangs werde ich die Person vorstellen, der das Nadelproblem seinen Namen zu verdanken hat. Danach werde ich auf ein paar grundlegende stochastische Begriffe eingehen, da diese für eine Variante des Beweises nötig sind. Im Hauptteil meiner Arbeit widme ich mich dann zwei verschiedenen Beweisen des Problems, einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Beweis und einem analytischen Beweis.
Gegen Ende möchte ich noch die Diskussion rund um eine auf sechs Nachkommastellen genaue Approximation von π eines italienischen Mathematikers namens Lazzarini eingehen.

2 Georges Louis Leclerc

Der Mann, nachdem das berühmte Nadelproblem benannt wurde, hieß mit bürgerlichen Namen Georges Louis Leclerc. Er wurde am 7. September 1701 in Montbard als Sohn von Benjamin-Francois Leclerc und Anne-Christine Marlin geboren. Anne-Christine Marlin erbte von ihrer Familie ein Vermögen, mit dem die junge Familie das Lehen über den Landbesitz Buffon kaufen konnte. Damit einhergehend ereignete sich ein gesellschaftlicher Aufstieg für die Familie und die Aufnahme der Bezeichnung des neuen Besitzes in den Familiennamen, sodass Georges Lois Leclerc später bekannt als Comte de Buffon in die Geschichte eingehen sollte.

Buffon besuchte die Jesuitenschule in Dijon, um danach dem Wunsch des Vaters gemäß sich dem Studium der Rechtswissenschaften zu widmen, welches er nur mit mittelmäßigem Erfolg abschloss. Sein Interesse galt seit jeher der Mathematik. Bereits im Alter von 20 Jahren stellte er unabhängig von Newton den Binomischen Lehrsatz auf. 1727 schloss er Freundschaft mit dem Schweizer Professor Gabriel Cramer, der uns aufgrund der Cramerschen Regel noch heute ein Begriff ist. Erst 1728, also im Alter von 28 Jahren begann Buffon mit dem Mathematikstudium aber auch mit dem Studium der Medizin und der Botanik in Angers. Als seine Mutter starb, erbt Georges Louis Leclerc ein großes Vermögen, und kehrt nach einer Europareise zurück nach Frankreich.
Bereits 1734 wurde Buffon Mitglied der Academie Royale des Sciences und fünf Jahre später wurde er von König Ludwig XV. zum Direktor des Königlichen Botanischen Garten in Paris ernannt, und in Folge dessen in den Grafenstand erhoben.
Sein wichtigstes Werk, das in 36 Bänden erschien, heißt ”Histoire naturelle generale et

particuliere“ und beschäftigt sich mit dem Reichtum der Natur und ihrer Einteilung. Buffon starb am 16. April 1788 im Alter von 86 Jahren. [vgl. 1]

(Abb. 1)

3 Vorbereitungen

Da sich die erste Beweisvariante mit Begriffen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt, werde ich vorerst einige Definitionen wiederholen. [vgl. 2 und 3]

Definition:

Ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar (Ω, P), wobei Ω eine nichtleere Menge und P eine auf den Teilmengen von Ω definierte Funktion mit folgenden Eigenschaften ist:
a) $P(A) \geq 0$ mit $A \subset \Omega$
b) $P(\Omega) = 1$
c) $P(A + B) = P(A) + P(B)$ falls $A = \emptyset$
P heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung und $P(A)$ heißt Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A.

Definition:

Eine reelle Zufallsvariable X auf Ω ist eine Abbildung X: $\Omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis ω eine reele Zahl $X(\omega)$ zuordnet. Sie ordnet also den Ergebnissen eines Zufallsexperiments reelle Werte zu.

Definition:

Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariable X ist der Wert, von dem man annimmt, dass er bei oftmaligen Wiederholungen eines Experiments als Durchschnitt herauskommt. Errechnet wird er durch E(X) = $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)X(\omega)$
wobei $p(\omega)$ die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten des jeweiligen Ereignisses $\omega \in \Omega$ ist.
Handelt es sich um endliche Größen, reicht die Notation $E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i p_i$
mit X_i = Wert des Ergebnisses und p_i = Wahrscheinlichkeit von X_i

Beispiel:

Das Werfen eines Würfels
Die Zufallsvariable X ist die gewürfelte Augenzahl, p_i die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl i, für $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
$\Rightarrow E(x) = \ 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{6} + 4 * \frac{1}{6} + 5 * \frac{1}{6} + 6 * \frac{1}{6}$

Praktisch heißt das: Würde ich 500 Mal einen Würfel werfen, die Augenzahlen addieren und die Summe durch 500 dividieren, so würde das Ergebnis sich mit hoher Wahrscheinlichkeit in der Nähe von 3,5 befinden. [Vgl. 3]

Als weitere Vorbereitung für den Beweis des Nadelproblems werde ich die Linearität des Erwartungswertes zeigen: [Vgl. 4]

Lemma 1: Seien X, Y Zufallsvariablen auf Ω.
Dann gilt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Beweis.

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{\omega\in\Omega} p(w)(X(w)+Y(w)) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} [p(w)X(w)+p(w)Y(w)] \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} p(w)X(w) + \sum_{\omega\in\Omega} p(w)Y(w) \\ &= E(X)+E(Y) \end{aligned}$$

□

Das kann man auch allgemein für endlich viele Zufallsvariablen zeigen:

Korollar 2
Seien $X_1, X_2, ..., X_n$Zufallsvariablen auf Ω.
Dann gilt:

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$

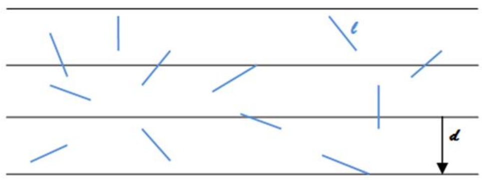
Beweis.

$$\begin{aligned} E(X_1+...+X_n) &= \sum_{\omega\in\Omega} p(w)(X_1+...+X_n) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} [p(w)X_1(w)+...+p(w)X_n(w)] \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} p(w)X_1(w) + ... + \sum_{\omega\in\Omega} p(w)X_n(w) \\ &= E(X_1)+...+E(X_n) \end{aligned}$$

□

4 Das Nadelproblem von Buffon

Wenn man eine kurze Nadel auf liniertes Papier fallen lässt,
wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel so liegen bleibt, dass sie eine der Linien kreuzt?



Um dieses Problem zu lösen, warf Buffon angeblich selbst Holzstäbchen über die Schulter auf einen Fliesenboden und kam im Laufe seine Überlegungen zu einer interessanten Erkenntnis: Die Lösung dieses Problems beinhaltet die Kreiszahl π!
Dies führt zu der weitergehenden Überlegung, dass man mit Hilfe dieses wahrscheinlichkeitstheoretischen Problems die irrationale Zahl π experimentell approximieren kann.
Ein weiterer interessanter Aspekt dieses Problems und seines Beweises ist, dass die geometrische Zahl mit dem Gebiet der Wahrscheinlichkeit verknüpft wird. Es gibt aber noch weitere Methoden, die π durch Zufallsexperimente annähern, die sogenannten Monte-Carlo-Methoden [vgl. 8] .

Wovon hängt die Wahrscheinlichkeit eines Treffers ab?
Klarerweise wird die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine Linie durchkreuzt von der Länge der Nadel l und dem Abstand der Linien d abhängen. Die Nadel bezeichnen wir als kurz, wenn $l < d$ gilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Nadel also zwei unterschiedliche Linien bei einem Wurf kreuzt ist gleich 0. Außerdem wird vorausgesetzt, dass die Linien parallel gezogen sind, d also überall gleich groß ist.

Satz: Eine kurze Nadel der Länge l werde auf liniertes Papier fallen gelassen, dessen Linien einen Abstand $d \geq l$ haben. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel in einer Position zu liegen kommt, in der sie eine der Linien des Papiers kreuzt, genau :

$$p = \frac{2 \cdot l}{d \cdot \pi}$$

Dieser Satz lässt sich auf mehrere Arten beweisen. Wenden wir uns als Erstes dem stochastischen Beweis zu:

4.1 Stochastischer Beweis (Beweis von E. Barbier)

[Vgl. 4] Barbier löst die Aufgabe, indem er eine beliebige Nadel fallen lässt, sich also nicht auf eine kurze Nadel mit Länge l beschränkt.
Die erwartete Anzahl der Kreuzungspunkte ist dann:

$$E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + ...$$

wobei p_1 die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Nadel eine Linie kreuzt, p_2 die Wahrscheinlichkeit, dass sie zwei Linien kreuzt, usw.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine geworfene Nadel mindestens eine Linie kreuzt, was ja die eigentliche Frage des von Buffon gestellten Problems ist, beträgt dann

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + ...$$

Ist die Nadel kurz wie im Sinne von Buffon, so folgt natürlich: $0 = p_2 = p_3 = p_4 = ...$, da die Nadel nicht mehr als eine Linie kreuzen kann. Damit wäre $p_1 = E$ genau der Erwartungswert der Anzahl der Kreuzungen.

Betrachten wir nun das Problem für eine längere Nadel, auch mit Hilfe des Erwartungswertes.

Sei $E(l)$ die Anzahl der Kreuzungspunkte für eine gerade Nadel der Länge l.
Teilt man die Länge in zwei Abschnitte, also $l = x + y$, (siehe Abb. 2), so erhält man für die erwartete Anzahl an Kreuzungen:

$$E(x + y) = E(x) + E(y)$$

aufgrund der Linearität der Erwartungswertfunktion (Siehe Lemma 1).

(Abb.2)

Das heißt, die Anzahl der Kreuzungen der ganzen Nadel ist die Summe aus der Anzahl der Kreuzungen des vorderen Teiles der Länge x und der Anzahl der Kreuzungen des hinteren Teiles der Länge y.

Zusammenhängend mit der Linearität des Erwartungswertes, benötigen wir noch drei weitere Aussagen für den vollständigen Beweis des Satzes:

Lemma 3
Sei $n \in \mathbb{N}, E(x)$ der Erwartungswert der Kreuzungen für eine Nadel der Länge x.
Dann gilt: $E(nx) = nE(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. (durch vollständige Induktion über n)

IB:
n = 1:
$E(1x) = E(x) = 1E(x)$

n = 2:
$E(2x) = E(x + x) = E(x) + E(x) = 2E(x)$
$(VerwendehierbeiLemma1)$

IA.: Es gelte: $E(nx) = nE(x)$

IS.: z.z. $E((n + 1)x) = (n + 1)E(x)$

$E((n + 1)x = E(nx + x) = E(nx) + E(x) = nE(x) + E(x) = (n + 1)E(x)$

□

Korollar 4

Sei $r \in \mathbb{Q}, r \geq 0$ und $E(x)$ der Erwartungswert der Kreuzungen einer Nadel der Länge x.
Dann gilt: $E(rx) = rE(x)$

Beweis:
Sei $r := \frac{n}{m}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$
z.z. $E(\frac{n}{m} \cdot x) = \frac{n}{m}E(x)$

Multipliziere dazu beide Seiten mit m:

z.z. $mE(\frac{n}{m}x) = m\frac{n}{m}E(x)$

$mE(\frac{n}{m}x) = E(\frac{n}{m}mx) = E(nx) = nE(x) = m\frac{n}{m}E(x)$

Anmerkung
Es reicht in unserem Fall Korollar 4 für positive rationale Zahlen zu zeigen, da die Argumente der Erwartungsfunktion Längen behandeln und daher nur positive Werte sinnvoll sind.

Lemma 5
Der Erwartungswert einer Kreuzung der Nadel und einer Linie hängt monoton von der Länge der Nadel ab.
Darum gilt:
$E(x) = cx$
mit einer Konstanten c.

Beweis. $E(x) = E(1x) = E(1)x = c(Ex)$ mit $c = E(1)$ Konstante

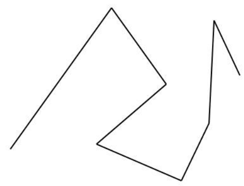
noch zu zeigen: $E(1x) = E(1)x$
d.h. zeige: $E(tx) = tE(x)$ für $t \in \mathbb{R}$

Wir wissen aus der Analysis, dass es für jede reelle Zahl t eine Folge rationaler Zahlen r_n gibt, die gegen t konvergiert.

Sei $t = lim_{n\to\infty}r_n$, also t der Grenzwert einer solchen Folge rationaler Zahlen r_n.
Dann gilt wegen der Rechenregeln für Grenzwerte:

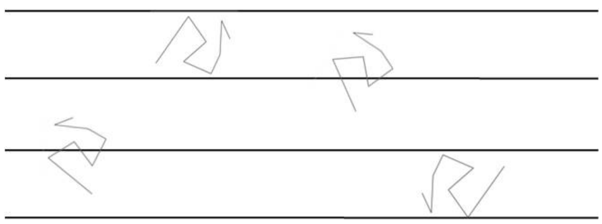
$E(tx) = E(lim_{n\to\infty}r_nx) = lim_{n\to\infty}E(r_nx) = lim_{n\to\infty}r_nE(x) = tE(x)$ □

Wir wissen nun, dass $E(x) = cx$ für ein $c \in \mathbb{R}$
Doch wie sieht diese Konstante konkret aus? Um diese Frage zu beantworten betrachtet Barbier eine „krumme Nadel“, also eine Nadel der Länge l, die aus mehreren geraden Stücken besteht:



(Abb.3 - Krumme Nadel)

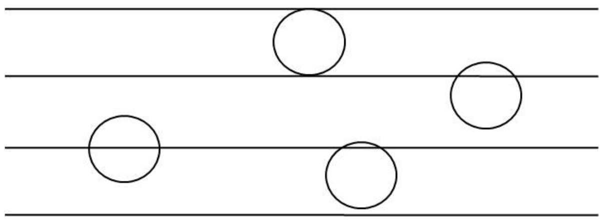
Wirft man diese „Nadel“ auf ein liniertes Papier, so ist die Gesamtanzahl der Kreuzungen die Summe der Kreuzungen der einzelnen Nadelabschnitte.
$\Rightarrow E = c * l$ wegen der Linearität des Erwartungswertes.
Warum ist das so?
Betrachten wir eine Skizze:



(Abb.4)

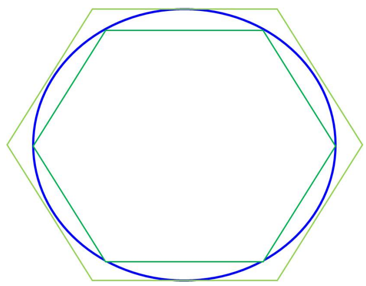
Wir können in Abbildung 4 erkennen, dass es in einigen Fällen zu mehreren Schnittpunkten zwischen Nadel und Linie kommt. Aber es gibt auch Fälle, in kein Schnittpunkt auftritt.
Bei einer geraden Nadel der Länge l ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu mindestens einem Kreuzungspunkt kommt größer, wobei gleichzeitig die Anzahl der Kreuzungen geringer ist. Führt man das Experiment nun genügend oft durch, nähern sich die Erwartungswerte der krummen und der geraden Nadel einander an und wir kommen zu dem Schluss $E = cl$.

Der Trick, um die Konstante c bestimmen zu können benutzt die Erkenntnisse um die „krumme Nadel“ auf besondere Art und Weise:
Wir betrachten eine Nadel, die einen perfekten Kreis C bildet, mit einem Durchmesser d, also dem Abstand der Linien auf dem Papier. Die Länge dieser Nadel ist dann $x = d\pi$
Wirft man diese Nadel aufs Papier, so ergeben sich immer genau 2 Schnittpunkte.



(Abb.5)

Die Kreislinie kann man durch 2 Polygone P_n und P^n approximieren. P_n liegt dabei genau innerhalb des Kreises und P^n genau außerhalb.



(Abb.6)

Jede Linie, die P_n schneidet, schneidet auch C und jede Linie die C schneidet, tut dies auch mit P^n.
Betrachten wir nun die Anzahl der Schnittpunkte, so folgt:

$$E(P_n) \leq E(C) \leq E(P^n)$$

Aus unseren Erläuterungen zur krummen Nadel wissen wir, dass $E(P_n) = c \cdot l(P_n)$ und dass $E(P^n) = c \cdot l(P^n)$ gilt. Das heißt der Erwartungswert der Kreuzungen ist gleich die Konstante c mal die Länge der Nadel
Außerdem wissen wir, dass C genau zwei Schittpunkte mit den Linien hat. Daraus folgt

$$c \cdot l(P_n) \leq 2 \leq c \cdot l(P^n)$$

Man kann sowohl P_n als auch P^n durch die Erhöhung der Kantenzahl n an C, also den Kreis approximieren. Das heißt:

$$\lim_{n\to\infty} l(P_n) = d\pi = \lim_{n\to\infty} l(P^n)$$

Wenden wir dies auf die oben genannte Ungleichung $c \cdot l(P_n) \leq 2 \leq c \cdot l(P^n)$ an, so folgt:

$$cd\pi \leq 2 \leq cd\pi$$

Das heißt $cd\pi = 2$
und damit: $c = \frac{2}{d\pi}$

Somit haben wir die Konstante, von der der Erwartungswert abhängt bestimmt. Wenden wir dies nun auf die zu erwartenden Kreuzungen an:

$$E(l) = c \cdot l = \frac{2}{d\pi} \cdot l$$

Da wir weiter oben gezeigt haben, dass $E(l) = p$ gilt, folgt: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig geworfene Nadel einen Kreuzungspunkt mit einer Linie hat, liegt bei

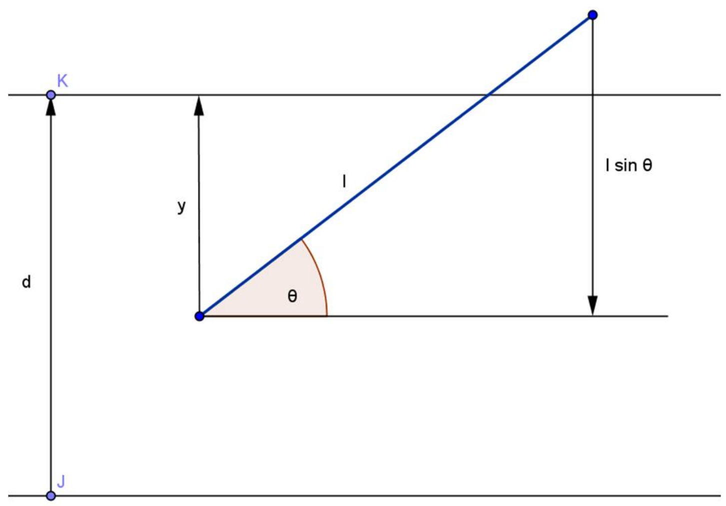
$$p = \frac{2 \cdot l}{d \cdot \pi}$$

Außerdem haben wir hiermit gezeigt, dass man π wie folgt approximieren kann:

$$\pi = \frac{2 \cdot l}{c \cdot d}$$

4.2 Analytischer Beweis

Der zweite Beweis des Nadelproblems kommt aus der Analysis und betrachtet die Winkel, unter dem eine Nadel auf einer Linie liegen kann. [Vgl. 6]

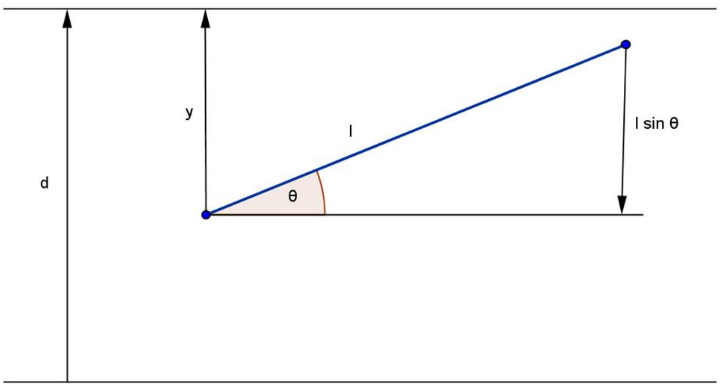


(Abb.7)

In diesem Fall kreuzt die Nadel eine Linie. Damit dies aber der Fall ist, muss gelten:

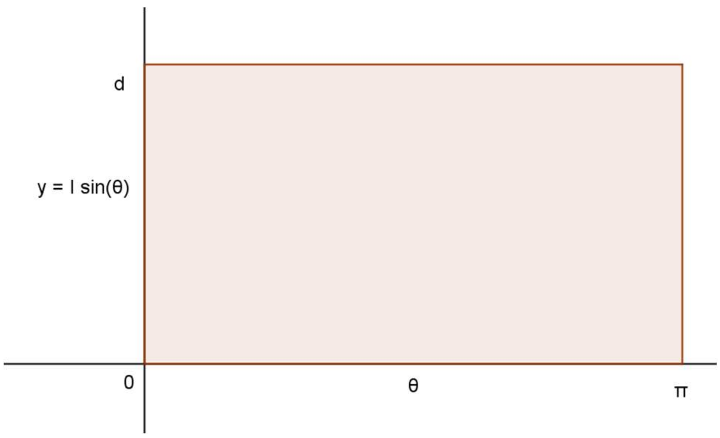
$$y < l \cdot \sin(\theta)$$

Im Fall $y > l \cdot \sin(\theta)$ kreuzt die Nadel keine Linie.



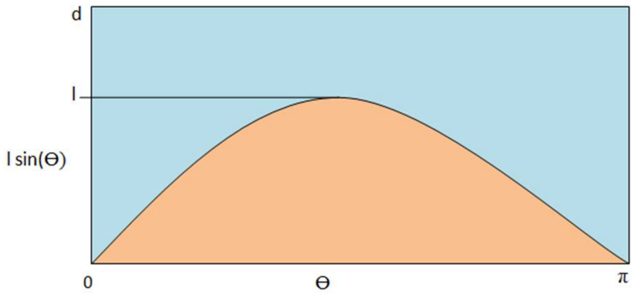
(Abb.8)

Eine Berührung, also den Fall $y = l \cdot \sin(\theta)$ werden wir auch als eine Kreuzung rechnen. Stellt man das grafisch dar, kann man sagen, dass alle Möglichkeiten, wie eine Nadel liegen kann als Rechteck dargestellt werden können, wobei die Länge des Rechtecks π sei und die Höhe d (Siehe Abb. 8). Das heißt die Länge entspricht den Möglichkeiten für θ mit $0 \leq \theta \leq \pi$ und die Höhe den Möglichkeiten für $y = l \cdot sin(\theta)$.



(Abb.8)

Betrachtet man die Ereignisse, wo es zu einer Kreuzung kommt, stellt man fest, dass sie sich alle unter der Kurve $y = l \cdot \sin(\theta)$ liegen.
Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer Kreuzung untersucht man das Verhältnis zwischen der Fläche unter der Kurve zur Fläche des gesamten Rechtecks.



(Abb.9)

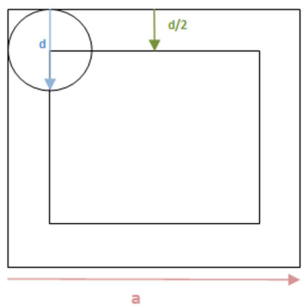
Fläche unter der Kurve : Fläche des Rechtecks $= \frac{\int_0^\pi l \cdot \sin(\theta)}{d \cdot \pi} = \frac{[-l \cdot \sin(\theta)]_0^\pi}{d \cdot \pi} = \frac{2l}{d\pi}$

Das heißt, wir kommen wieder auf die Beziehung:

$$p = \frac{2l}{d\pi}$$
$$\pi \approx \frac{2l}{dp}$$

5 Ähnliches Problem - Fairground-Spiele

Im 18. Jahrhundert war es ein beliebtes Spiel, eine kleine Münze auf eine quadratische Fließe zu werfen. Auch hier stellt sich wieder die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Münze innerhalb des abgegrenzten Bereich landet. Auch dieses Problem wurde von Buffon untersucht, wobei bei dieser Variante die Fragestellung auch die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn miteinberechnet. Buffon argumentierte, dass die Münze mit Durchmesser d genau dann vollständig innerhalb des Quadrates mit Seitenlänge a liegt, falls der Mittelpunkt der Münze innerhalb eines kleineren Quadrates mit Seitenlänge $(a-d)$ landet. Natürlich ist es sinnvoll anzunehmen, dass der Durchmesser der Münze nicht größer als $\frac{a}{2}$ ist. [Vgl. 6]



Für die gefragte Wahrscheinlichkeit erhalten wir:

$$p = \frac{(a-d)^2}{a^2} = (1 - \frac{d}{a})^2$$

Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich also aus $\frac{günstigeFläche}{möglicheFläche}$.

Beziehen wir nun auch die Frage des Gewinnes mithinein in die Problematik:

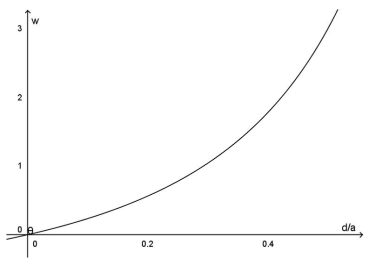
Damit das Spiel fair ist, muss der Erwartungswert 0 sein, d.h. beträgt der Einsatz 1 Geldeinheit und erhält der Gewinner w Einheiten, so gilt:

$$p \cdot w + (1-p) \cdot (-1) = 0$$

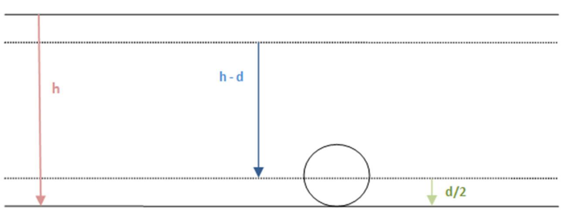
Formuliert man diesen Ansatz um, dann ergibt sich:

$$w = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1 \text{ mit } p = (1 - \frac{d}{a})^2$$

Die Gewinnfunktion, also w als Funktion von $\frac{d}{a}$ sieht wie folgt aus:



Vereinfacht man nun die Spielregeln, sodass die Münze nicht mehr innerhalb eines Quadrates, sondern innerhalb zweier Linien mit Abstand h liegen bleiben muss, so verändert sich auch das Gewinnverhalten.



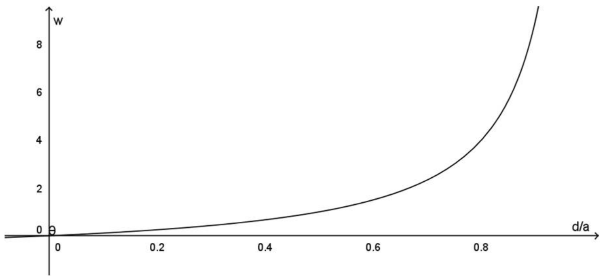
Die Wahrscheinlichkeit eines Treffers liegt hier bei

$$p = \frac{h-d}{h} = 1 - \frac{d}{h}$$

Möchte man wieder ein faires Spiel erhalten, muss der Erwartungswert wieder bei 0 liegen, also muss folgen:

$$p \cdot w + (1-p) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow$$
$$w = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{(h-d)/h} - 1 = \frac{h}{h-d} - 1 = \frac{d}{h-d} = \frac{h/d}{1-d/h}$$

Das heißt, man muss die Gewinnsumme w mit $\frac{h/d}{1-d/h}$ ansetzen.
Der Graph der Gewinnfunktion sieht nun so aus:



Die Playground-Spiele sind also eine scheinbar etwas kompliziertere Form unseres Nadelproblems, wobei jedoch das ursprüngliche Nadelproblem von Buffon im mathematischen Sinne interesanter ist.

6 Lazzarini-Approximation von π

Mario Lazzarini, ein italienischer Mathematiker veröffentlichte 1901 einen Bericht in der Zeitschrift Periodico de Matematica mit dem Titel: Un applicazione del calcolo della probabilita alla ricerca sperimentale di un valor approssimato di ””, was so viel bedeutet wie: Eine Anwendung zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der experimentellen Suche nach einem näherungsweisen Wert von „π“ Dieser Artikel brachte ihm viel Ruhm, aber auch Kritik und Ungläubigkeit ein. Kritisiert wurde er vor allem von Lee Badgers [vgl 5] und Tim O'Beirne. Lazzarini behauptete, eine Maschine konstruiert zu haben, mit der Stöckchen auf einen durch Linien unterteilten Untergrund geworfen wurden. Die Stöckchen oder Nadeln sollen angeblich 2,5 cm lang und der Abstand zwischen den Linien 3 cm breit gewesen sein.
Lazzarinis Bericht zu Folge warf er 5408 Mal diese Nadel und zählte 1808 Treffer.
Setzt man diese Zahlen in die bereits vorhin bewiesene Formel für das Nadelproblem ein, so erhählt man für:

$$p = \tfrac{2 \cdot l}{d \cdot \pi} \Leftrightarrow$$
$$\tfrac{1808}{3408} = \tfrac{2 \cdot 2{,}5}{3 \pi_l} \Leftrightarrow$$
$$\pi_l = 3,14159292$$

Zum Vergleich: $\pi = 3,141592654...$
Das heißt π_l, also die von Lazzarini approximierte Zahl deckt sich bis zur sechsten Nachkommastelle mit π. Ein sehr erstaunlich genaues Ergebnis.

Doch genau diese Genauigkeit löste bei einigen Mathematikern Zweifel aus.
Als Erstes stellt sich die Frage, wieso Lazzarini genau 3408 Mal eine Nadel warf. Es wäre doch logischer die Nadel 3400 Mal oder 3500 Mal zu werfen. Also: Wieso 3408 Würfe?
Lee Badgers stellte sich diese Frage, und betrachtete deshalb, wie eine Veränderung der Trefferzahl sich auf die Approximation von π auswirken würde.

Gehen wir nun davon aus, dass die Nadel 3408 Mal geworfen wird, es aber nur zu 1807 Treffern kommen würde. Dann kommen wir zu einen Ergebnis:

$$\pi_l = 3,143331$$

Wir haben in diesem Fall also nur eine Übereinstimmung von zwei Nachkommastellen.
Zur weiteren Illustration: Angenommen es kommt zu 1809 Treffern. Dann ergibt sich für die Näherung von π:

$$\pi_l = 3,139856$$

Es kommt also nur zur Übereinstimmung von einer Nachkommastelle mit π.
Dass es also genau zu 1808 Treffern gekommen ist, war also ein sehr großer, glücklicher Zufall, den wir dem Herrn Lazzarini ja gönnen.

Aber betrachten wir uns seine Wahl für die Anzahl der Würfe und Treffer noch einmal genauer:
In die Formel eingesetzt ergibt sich mit den Zahlen von Lazzarini:

$$\frac{2{,}5 \cdot 2 \cdot 3408}{3 \cdot 1808} = \frac{17040}{5424}$$

Dividieren wir dies durch 48, so erhalten wir:

$$\frac{355}{113} = 3,14159292$$

Dieser Bruch $\frac{355}{113}$ ist jedoch jedem Mathematiker, der sich mit π beschäftigt bekannt. Er liefert die zweitbeste Approximation an π, die bis heute bekannt ist. Doch sie wurde bereits im 5. Jahrhundert von einem chinesischen Mathematiker entdeckt. Wir haben also noch einen Grund entdeckt, um an der Glaubwürdigkeit von Lazzarini's 'Zufallsexperiment' zu zweifeln.

Weitere Zweifel kommen auf, wenn man sich die ganze Tabelle der "geworfenen"Werte von Lazzarini ansieht, die er in seinem Artikel 1901 veröffentlichte. Bestimmt man zusätzlich die errechnete Wahrscheinlichkeit, also

$$p \cdot W = \frac{2 \cdot l}{d \cdot \pi} \cdot W = \frac{5}{3\pi} \cdot W$$

so erkennt man, dass seine Anzahl der Treffer ziemlich genau mit der errechneten Wahrscheinlichkeit übereinstimmen:

Anzahl der Würfe W	Anzahl der Treffer T	Errechnete Wahrscheinlichkeit
100	53	53,05
200	107	106,10
1000	524	530,52
2000	1060	1061,03
3000	1591	1591,55
3408	1808	1808,00

Diese Übereinstimmung lässt das Experiment auch etwas fragwürdig erscheinen. Einfache statistische Tests zeigen auch: die Wahrscheinlichkeit, dass das passiert, ist kleiner als $3 \cdot 10^{-5}$ [Vgl. 6]
Wir kommen also zu dem Schluss, dass Lazzarini's Leistung, π auf sechs Nachkommastellen genau zu approximieren entweder mit unwahrscheinlich viel Glück von Statten ging, oder doch eher eine gezielte Täuschung war, die ihm ja auch viel Ruhm einbrachte. Mich persönlich überzeugen eher die Argumente von Badgers und O'Beirne.

7 Literaturverzeichnis

[1] Complete Dictionary of Scientific Biography 2008
http://www.encyclopedia.com/topic/Georges-LouisLeclercBuffonComteDe.aspx1-1G2:2830900701-full (aufgerufen am 20.01.2014)

[2] Bosch Karl: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Heidelberg 2008

[3] Henze, Norbert: Stochastik fr Einsteiger, Wiesbaden 2010

[4] Aigner M., Ziegler G.: Das Buch der Beweise, Heidelberg 2010

[5] Töws, Nelli: Das Nadelproblem von Buffon. Ausarbeitung des Seminarvortrags, Marburg 2009
http://www.mathematik.uni-marburg.de/ bschwarz/Sem-09-Wfiles/06NelliTöws-NadelproblemvonBuffo Ausarbeitung.pdf (aufgerufen am 15.01.2014)

[6] Havil, Julian: Verbüfft?!. Mathematische Beweise unglaublicher Ideen, Princeton 2007

[7] Badgers, Lee: Lazzarinis Lucky Approximation of Pi. In: Mathematics Magazin, S. 83-91. 1994
http://www.uam.es/personal-pdi/ciencias/gallardo/Lazzarini.pdf (aufgerufen am 18.01.2014)

[8] Arndt Jrg, Haenel Christoph: Pi, Unleashed, Heidelberg 2000

7.1 Bildverzeichnis

Abb.1: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5e/Buffon-1707-1788.jpg/220px-Buffon-1707-1788.jpg