Karl-Franzens-Universität Graz

Von Freunden und Politikern

Seminar aus Reiner Mathematik

Andreas Wenger

Wintersemester 2013/14

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Man will es kaum glauben, aber auch der Begriff Freundschaft spielt in der Mathematik eine Rolle und zwar in der Graphentheorie. In dieser Seminararbeit wird folgendes Problem betrachtet, mathematisch formuliert und bewiesen.

„Betrachten wir einen Raum mit Personen, in dem je zwei Personen genau einen gemeinsamen Freund haben. Dann gibt es in diesem Raum eine Person, die mit allen anderen befreundet ist.“

Die Interpretation, dass diese Person ein Politiker sein soll, wie im BUCH der Beweise angedeutet, sei dem Leser im folgenden selbst überlassen.
Um diese Behauptung nun mathematisch zu formulieren, benötigt man einige grundlegende Definitionen aus der Graphentheorie.

2 Definitionen und Formulierung des Freundschaftssatzes

Definition 1.

- *Ein einfacher Graph G ist ein Paar (E, K) mit E einer Punktmenge, genannt Eckenmenge von G, und $K \subseteq \{M \in \mathcal{P}(E) : |M| = 2\}$, genannt Kantenmenge von G.*
- *Ein Graph heißt endlich, wenn $|E| < \infty$*
- *Die Funktion $d : \begin{cases} E \to \mathbb{N}_0 \\ u \mapsto \big|\{M \in K : u \in M\}\big| \end{cases}$ heißt Gradfunktion zum Graphen G.*
  Ist die Gradfunktion konstant, d. h. $d(u) = d(v) \quad \forall\, u, v \in E$, dann heißt G ein regulärer Graph.
- *Ein nicht-leerer Graph W mit der als geordnetes Tupel aufgefassten Eckenmenge $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ und Kantenmenge $\big\{\{x_i, x_{i+1}\} : i = 1, \ldots, n\big\}$ heißt Weg. Sind alle Ecken verschieden, dann heißt W ein Pfad.*
- *Ein Weg der Länge n in einem einfachen Graphen $G = (E, K)$ ist ein Teilgraph $W = (E_W, K_W)$ mit $|K_W| = n$, welcher als Graph die Wegeigenschaft erfüllt. W heißt Pfad, wenn alle Ecken verschieden sind.*
- *Ein Kreis der Länge m in einem einfachen Graphen $G = (E, K)$ ist ein Weg W der Länge m mit $x_1 = x_{m+1}$, dessen innere Punkte alle verschieden sind.*
  D. h. $Z = \big(E_W, K_W \setminus \big\{\{x_{m-1}, x_m\}\big\}\big)$ ist ein Pfad.

Definition 2 (Adjazenz und Adjazenzmatrix)**.**
Sei $G = (E, K)$ ein endlicher einfacher Graph. Zwei Punkte $u, v \in E$ heißen adjazent oder benachbart, wenn $\{u, v\} \in K$.
Die Adjazenzmatrix A zum Graphen G mit $E = \{u_1, \ldots, u_n\}$, ist gegeben durch
$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \{u_i, u_j\} \in K \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$

2.1 Der Freundschaftssatz

Satz 1.
Sei $G = (E, K)$ ein endlicher einfacher Graph mit der Eigenschaft:

$$(GN) \qquad \forall\, u, v \in E \quad \exists!\, w \in E : \ \{u, w\} \in K \quad \wedge \quad \{v, w\} \in K$$

Dann existiert ein $a \in E$, sodass $\{u, a\} \in K \qquad \forall\, u \in E \setminus \{a\}$.

Bemerkung:
Hierbei ist zu beachten, dass die in der Einleitung erwähnte „Freundschaft“ stillschweigend als beiderseitig angenommen wird und dass natürlich eine Person nicht zu sich selbst befreundet, also nicht adjazent, ist.

Den Freundschaftssatz kann man auf mehrere Arten beweisen. Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem ersten Beweis dieses Satzes, formuliert von Paul Erdös, Alfred Rényi und Vera Sós. Dieser Beweis besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil besteht aus kombinatorischen Überlegungen und der zweite Teil benutzt grundlegende Erkenntnisse der linearen Algebra und der Algebra.

3 Vorarbeit

3.1 Benötigte Resultate aus der Linearen Algebra

Lemma 2. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = A$. Dann sind alle Eigenwerte von A reell. D. h. A besitzt über $\mathbb{R}$ n Eigenwerte.*

Beweis.
Sei λ ein Eigenwert von A, dann ist $\overline{\lambda}$ ebenfalls ein Eigenwert von A. Sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.
Dann gilt: $Av = \lambda v \quad \Rightarrow (Av)^* = (\lambda v)^* \quad \xRightarrow{A^*=A} v^*A = v^*\overline{\lambda}$.
Also ist $v^* = \overline{v}^T$ Linkseigenvektor von A zum Eigenwert $\overline{\lambda}$. Damit ist $\overline{v}$ Rechtseigenvektor von $A^T = A$, also ist $\overline{v}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

$$\overline{\lambda}v^*v = \overline{(\lambda v)}^T v = \overline{(Av)}^T v = v^*A^*v = v^*Av = \lambda v^*v \quad \Rightarrow \quad 0 = (\lambda - \overline{\lambda})\underbrace{\|v\|_{\mathbb{C}^n}}_{\neq 0}$$

$\Longrightarrow \lambda = \overline{\lambda} \quad \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ <u>qed</u>

Lemma 3. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für die Spur einer Matrix gilt:*

- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \qquad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \forall\, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$
- *Sei* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *und* $B \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \Rightarrow \operatorname{tr}(BAB^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$

Beweis.

- $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \qquad B = (b_{jk})_{\substack{j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,m}}$
  $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{k=i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=i=1}^{m} b_{jk}\cdot a_{ij} = \operatorname{tr}(BA)$
- $\operatorname{tr}(BAB^{-1}) = \operatorname{tr}\big((BA)B^{-1}\big) = \operatorname{tr}(B^{-1}BA) = \operatorname{tr}(A)$

<u>qed</u>

Korollar 4. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann gilt:* $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \operatorname{tr}(A)$.

Beweis.
Da A symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar, d. h. $\exists\, T \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \exists\, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Diagonalmatrix mit den Eigenwerten λ_i von A als Diagonalelemente, sodass $D = T^{-1}AT$.
$\Rightarrow TDT^{-1} = A \quad \Rightarrow \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(TDT^{-1}) \overset{\textit{Lemma 3}}{=} \operatorname{tr}(D) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$

<u>qed</u>

<u>Korollar</u> 5. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:* $\quad Av = \lambda v \quad \Rightarrow A^2 v = \lambda^2 v.$

Beweis. $A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda^2 v$ <u>qed</u>

<u>Folgerung</u> Ist A symmetrisch und sind die Eigenwerte λ_i von A^2 bekannt (diese sind alle ≥ 0, weil A^2 positiv semidefinit ist), dann gibt es $r_i, s_i \in \mathbb{N}_0$, sodass $+\sqrt{\lambda_i}$ r_i–facher und $-\sqrt{\lambda_i}$ s_i–facher Eigenwert von A ist.

3.2 Benötigte Resultate aus der Algebra

<u>Lemma</u> 6. *Sei R ein Integritätsbereich und Q sein Quotientenkörper.*
Sei $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ und $\frac{a}{b} \in Q$ mit $p\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ und $(a \nmid b \ \wedge\ b \nmid a)$. Dann gilt: $a\big|_R a_0 \quad \wedge \quad b\big|_R a_n$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
p\left(\frac{a}{b}\right) = a_0 + a_1\frac{a}{b} + a_2\frac{a^2}{b^2} + \ldots + a_{n-1}\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + a_n\frac{a^n}{b^n} &= 0 && \mid \cdot b^n \\
a_0 b^n + a_1 a b^{n-1} + a_2 a^2 b^{n-2} + \ldots + a_{n-1}a^{n-1}b + a_n a^n &= 0 && \mid -a_n a^n \qquad \mid \cdot(-1) \\
b(-a_0 b^{n-1} - a_1 a b^{n-2} - \ldots - a_{n-1}a^{n-1}) &= a_n a^n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow b\big|_R a_n a^n \quad \Rightarrow \quad \left[b\big|_R a^n \quad \vee \quad b\big|_R a_n\right] \quad \xRightarrow{b \nmid a^n} \quad b\big|_R a_n$$

$$\begin{aligned}
a_0 b^n + a_1 a b^{n-1} + a_2 a^2 b^{n-2} + \ldots + a_n a^n &= 0 && \mid -a_0 b^n \qquad \mid \cdot(-1) \\
a(-a_1 b^{n-1} - a_2 a b^{n-2} - \ldots - a_{n-1}a^{n-2} - a_n a^{n-1}) &= a_0 b^n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow a \big|_R a_0 b^n \quad \Rightarrow \quad \big[a \big|_R b^n \quad \vee \quad a \big|_R a_0 \big] \quad \xRightarrow{a \nmid b^n} \quad a \big|_R a_0$

qed

Korollar 7. *Sei* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\sqrt{k} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \sqrt{k} \in \mathbb{Z}$.

Beweis. $\mathbb{Z}$ ist ein Integritätsbereich und $\mathbb{Q}$ sein Quotientenkörper.
$\sqrt{k}$ ist Nullstelle von $p(x) = x^2 - k \ \in \mathbb{Z}[x]$. Sei $\sqrt{k} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $\operatorname{ggT}(a,b) = 1 \quad \wedge \quad b \in \mathbb{N}$.
$\xRightarrow{\textit{Lemma 5.}} \ b \big|_{\mathbb{Z}} 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 \quad \Rightarrow \sqrt{k} = a \in \mathbb{Z}$ qed

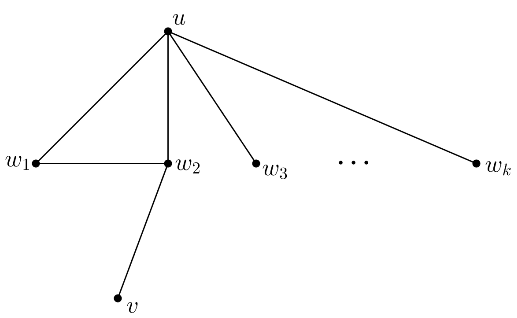
4 Beweis des Freundschaftssatzes

Beweis von Satz 1. durch Widerspruch.
Sei $G = (E, K)$ ein endlicher, einfacher Graph, welcher die Eigenschaft (GN) erfüllt, aber in dem keine Ecke zu allen anderen benachbart ist.

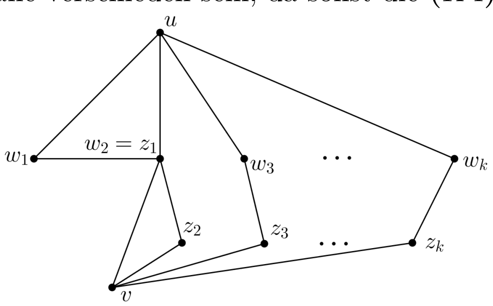
(1) *Beobachtungen:*

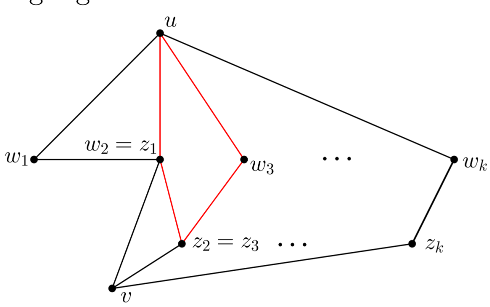
- G enthält keine Kreise der Länge 4, da sonst die Eigenschaft (GN) nicht erfüllt wird. $(K4)$
- Für die Gradfunktion d gilt, dass $d(u) < n - 1 \qquad \forall\, u \in E$.

(2) *Behauptung:* G ist ein regulärer Graph, d. h. $d(u) = d(v) \qquad \forall\, u, v \in E$.
Seien $u, v \in E$ zwei nicht adjazente Ecken, $d(u) = k$ und $w_1, w_2, \ldots, w_k$ seien die Nachbarn von u.
Aufgrund der Eigenschaft (GN) ist v zu genau einem der w_i benachbart, o. B. d. A. sei dies w_2. w_2 muss ebenfalls zu genau einem der anderen Nachbarn von u adjazent sein, dies sei w_1.



v hat nun mit w_1 den gemeinsamen Nachbarn $w_2 := z_1$. Für $i \geq 2$ hat v mit w_i genau einen gemeinsamen Nachbarn z_i. Diese z_i sind nicht benachbart zu u und müssen alle verschieden sein, da sonst die $(K4)$ Bedingung verletzt wird.





Demnach gilt: $\quad d(v) \geq k = d(u).$

Vertauscht man in diesen Überlegungen die Rollen von u und v, so folgt:
$d(u) \geq d(v) \quad \Rightarrow \quad d(u) = d(v)$ für nicht adjazente Ecken u, v.

Nun gilt für alle Ecken, außer w_2, dass diese entweder zu u oder zu v nicht adjazent sind und deshalb auch Grad k haben müssen.
Aufgrund der 2. Beobachtung in Punkt (1) hat jedoch w_2 auch einen nicht Nachbarn w. Durch dieselben Überlegungen mit dem Paar w_2 und w erhält man: $d(w_2) = d(w) = k$. Also ist G ein regulärer Graph.

Summiert man nun die Grade der k Nachbarn vom u auf so erreicht man, aufgrund der Eigenschaft (GN), alle Ecken des Graphen, außer u, genau einmal. Die Ecke u wird k mal gezählt und muss deshalb $k-1$ mal wieder abgezogen werden. Als Anzahl der Ecken im Graphen G ergibt sich damit:

$$|E| = n = k^2 - (k-1) = k^2 - k + 1 \tag{4.1}$$

(3) Betrachte nun den Grad k aller Ecken.

- $k = 1 \quad \Rightarrow n = 1:$ Einpunktiger,1−regulärer Graph $\quad \Rightarrow$ es gibt eine Schleife $\lightning$
- $k = 2 \quad \Rightarrow n = 3:$ Hier bekommt man den vollständigen Graphen K_3. $\lightning$

Also muss $k > 2$ sein, um nicht sofort auf einen Widerspruch zu kommen.
Man betrachte für diesen Fall die Adjazenzmatrix $A = (a_{ij})$ zum Graphen G.
Diese erfüllt folgende Eigenschaften:

- A ist symmetrisch, weil G ein ungerichteter Graph ist.
- $a_{ii} = 0 \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, da G keine Schleifen enthält.
- In jeder Zeile, und damit auch in jeder Spalte, stehen genau k Einsen und sonst 0.
- Zu zwei beliebigen Zeilen gibt es genau eine Spalte, in der beide eine 1 haben. In allen anderen Spalten ist in einer der Zeilen eine 0.

Durch diese Beobachtungen ergibt sich $A^2 = AA = AA^T = \begin{pmatrix} k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & k \end{pmatrix}$

Man sieht ganz einfach, dass A^2 den Eigenwert $\lambda = k-1$ mit zumindest $(n-1)$−facher algebraischer Vielfachheit besitzt. A^2 ist ebenfalls symmetrisch und besitzt daher n reelle Eigenwerte.
Nach *Korollar* 3. ergibt sich:

$$\begin{aligned} nk = \operatorname{tr}(A^2) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = (n-1)(k-1) + \lambda_n \\ nk &= nk - n - k + 1 + \lambda_n \\ k^2 \overset{(4.1)}{=} n + k - 1 &= \lambda_n \end{aligned}$$

Aus *Korollar* 4. folgt, weil A^2 positiv definit ist, dass die Eigenwerte von A^2 die Quadrate der Eigenwerte von A sind. Also existieren $r, s \in \mathbb{N}_0$ mit $r + s = n - 1$, sodass

- $+\sqrt{k-1}$ r−facher Eigenwert von A ist.
- $-\sqrt{k-1}$ s−facher Eigenwert von A ist.
- $\sqrt{k^2} = |k| = k$ 1−facher Eigenwert von A ist.

A besitzt n reelle Eigenwerte, also folgt wieder aus *Korollar* 3.:

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{tr}(A) &= k + r\sqrt{k-1} - s\sqrt{k-1} = k + (r-s)\sqrt{k-1} \\ r - s \neq 0 \quad &\mathit{sonst} \quad k = 0 \\ \sqrt{k-1} &= \frac{k}{s-r} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

$$\xRightarrow{\mathit{Korollar\ 6.}} \exists\, h \in \mathbb{Z} : \quad \sqrt{k-1} = h \quad \begin{cases} \Rightarrow k - 1 = h^2 & \Rightarrow k = h^2 + 1 \\ \Rightarrow h(s-r) = k = h^2 + 1 & \end{cases}$$

$$\Rightarrow h \mid h^2 \quad \wedge \quad h \mid h^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad h = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = h^2 + 1 = 2 \qquad ↯$$

Also muss es eine Ecke geben, die zu alle anderen Ecken benachbart ist.

qed

5 Aufkommende Fragen

5.1 Notwendigkeit der Endlichkeit

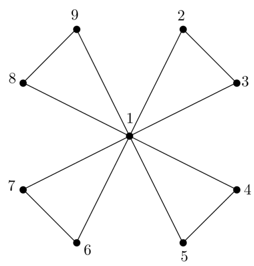
Die Aussage des Freundschaftssatzes gilt tatsächlich nur für endliche Graphen. Man kann ganz einfach einen unendlichen Graphen konstruieren, der das Resultat des Freundschaftssatzes nicht erfüllt.
Konstruktionsidee: Beginne mit einem Graphen G_0, der die Eigenschaft (GN) nicht erfüllt un in dem keine Ecke zu allen anderen Ecken benachbart ist, (z. B. ein Fünferkreis) und führe folgende Konstruktion durch: Erhalte den Graphen G_{k+1} aus G_k, indem man für jedes Paar von Ecken ohne gemeinsamen Nachbarn, eine neue Ecke hinzufügt, welche ein gemeinsamer Nachbar dieser Ecken ist. Dadurch entsteht ein unendlicher Graph, in dem keine Ecke zu allen anderen benachbart ist.

5.2 Alternative Formulierung und Kotzig's Vermutung

<u>Definition</u> 3 (Windmühlengraph).
Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Ein Graph W_n mit Eckenmenge $E = \{1, \ldots, n\}$ heißt Windmühlengraph, wenn er folgende Kantenmenge besitzt:

$$K = \Big\{\{1, i\} \;:\; i = 2, \ldots, n\Big\} \cup \Big\{\{i, i+1\} \;:\; i = 2, 4, \ldots, n-1\Big\}$$

$z.B. \quad n = 9$



<u>Satz</u> 8 (Alternative Formulierung des Freundschaftssatzes).
Sei G ein Graph mit der Eigenschaft, dass es zwischen zwei Ecken immer genau einen Weg der Länge 2 gibt. Dann muss G ein Windmühlengraph sein.

Nun stellt sich die Frage, ob es möglich ist, die Weglänge ℓ zu vergrößern. Der tschechoslowakisch-kanadische Mathematiker Anton Kotzig vermutet, dass diese Situation unmöglich ist.

„*Sei $\ell > 2$. Dann gibt es keinen Graphen, in dem es zwischen zwei Ecken immer genau einen Weg der Länge ℓ gibt.*“

Kotzig selbst verifizierte seine Vermutung bis $\ell = 8$ und Alexandr V. Kostochka verifizierte die Aussage für $\ell \leq 33$.

Literaturverzeichnis

[1] Aigner, Martin; Ziegler, Günter M.: Das BUCH der Beweise, 3. Auflage, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag 2010.

[2] www.uni-protokolle.de/Lexikon/Typen_von_Graphen_in_der_Graphentheorie.html, Stand: 26.12.2013.

[3] www.uni-protokolle.de/Lexikon/Zyklus_%28Graphentheorie%29.html, Stand: 26.12.2013.

[4] Turau, Volker: Algorithmische Graphentheorie, 2. Auflage, München, Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2004.