Vervollständigung Lateinischer Quadrate

Elisabeth Schmidhofer

01.12.2013

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Meine Seminararbeit handelt von der Vervollständigung Lateinischer Quadrate.
Zu Beginn der Arbeit werde ich wichtige Definitionen einführen, welche ich für die weiterführenden Sätze und Lemmata verwende.
Um zeigen zu können, wann man ein Lateinisches Quadrat vervollständigen kann, werde ich vor dem Hauptbeweis einige andere Sätze und Lemmata einführen und beweisen, ohne welche mir ein vollständiger Beweis zur Vervollständigung Lateinischer Quadrate nicht möglich wäre. Unter anderem werde ich den Heiratssatz von Philip Hall beweisen, welchen ich sogar des Öfteren in einem anderen Beweis verwenden werde.

2 Einleitung

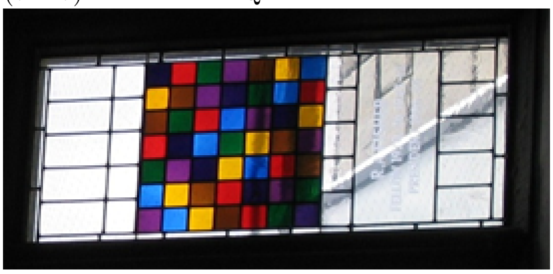
Lateinische Quadrate sind eine der ältesten kombinatorischen Konfigurationen, sie wurden schon in frühester Zeit studiert.
Ein Lateinisches Quadrat ist ein quadratisches Schema mit n Reihen und n Spalten, in dem alle n^2 Felder so mit n verschiedenen Symbolen gefüllt sind, dass jedes Symbol in einer Spalte und einer Zeile genau einmal vorkommt, das heißt die Spalten und Zeilen sind Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Der Name „Lateinisches Quadrat“ geht darauf zurück, dass Leonhard Euler, der sich intensiv mit diesen Quadraten beschäftigte, als Symbolmenge das lateinische Alphabet benutzte.
Weiters können als Symbole n verschieden Buchstaben, n verschiedene Farben, oder wie in unserem Fall, die Zahlen $1, \ldots, n$ verwendet werden.

2.1 Beispele

(4×4) Lateinisches Quadrat

1	4	2	3
2	1	3	4
4	3	1	2
3	2	4	1

(7×7) Lateinisches Quadrat



3 Lateinische Quadrate

3.1 Problemstellung

In dieser Seminararbeit beschäftige ich mich mit der Lösung folgenden Problems:

> Angenommen wir haben ein Quadrat, in dem einige Felder mit Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ gefüllt wurden, so dass in jeder Zeile und jeder Spalte jedes Element höchstens einmal vorkommt. Wann ist es nun möglich, die restlichen freien Felder so zu füllen, dass man am Ende ein vollständiges Lateinisches Quadrat erhält?

3.2 Grundlagen

3.2.1 Definition: Ordnung des Lateinischen Quadrats

Als Ordnung bezeichnet man die Anzahl der Elemente, welche als Einträge in ein Lateinisches Quadrat in Frage kommen. Ein Lateinisches Quadrat der Ordnung n ist ein$(n \times n)$ – Quadrat mit Einträgen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, wobei n aus den natürlichen Zahlen ist.

3.2.2 Definition: Partielles Lateinisches Quadrat

Ein partielles Lateinisches Quadrat, ist ein $(n \times n)$ – Quadrat, in dem einige Felder mit den Zahlen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ so ausgefüllt wurden, dass jedes Element höchstens einmal in jeder Zeile und jeder Spalte vorkommt.

1	4		3
2		3	
4	3		2
	2		

3.2.3 Voraussetzung

Um das Problem lösen zu können, müssen wir davon ausgehen, dass es sich bei der unvollständigen $(n \times n)$ – Matrix um ein partielles Lateinisches Quadrat handelt.

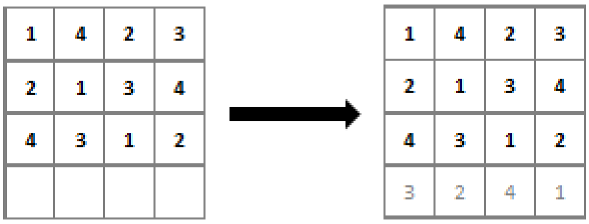
3.2.4 Neue Problemstellung

Das ursprüngliche Problem kann in folgendes Problem umgewandelt werden:

> Wann kann ein partielles Lateinisches Quadrat zu einem Lateinischen Quadrat derselben Ordnung vervollständigt werden?

3.2.5 Triviale Fälle

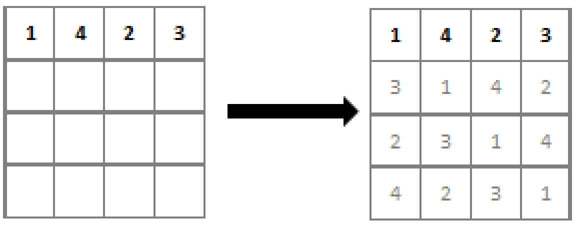
Angenommen es wurden die ersten $(n-1)$ Zeilen des Quadrats schon ausgefüllt. Um ein vollständiges Lateinisches Quadrat zu erhalten müssen wir nun nur noch alle Spalten mit dem jeweils fehlenden Element befüllen.
Die Vervollständigung ist in diesem Fall erzwungen, das heißt es gibt nur eine einzige Möglichkeit die fehlenden Elemente so anzuordnen, dass wir am Ende ein Lateinisches Quadrat erhalten.



1	4	2	3
2	1	3	4
4	3	1	2

1	4	2	3
2	1	3	4
4	3	1	2
3	2	4	1

Angenommen es wurde nur die erste Zeile des Quadrats vollständig gefüllt. In diesem Fall gibt es viele verschieden Möglichkeiten das Lateinische Quadrat zu vervollständigen. Eine davon wäre die Elemente der ersten Reihe in jeder Zeile um ein Feld zyklisch zu verschieben.



1	4	2	3

1	4	2	3
3	1	4	2
2	3	1	4
4	2	3	1

3.2.6 Folgerung

Nun haben wir gesehen, dass wir umso mehr Möglichkeiten habe, das Lateinische Quadrat zu vervollständigen, je weniger Felder von Anfang an gefüllt waren.

3.2.7 Unmögliches Beispiel

Auch wenn ein partielles Lateinische Quadrat mit nur n Elementen befüllt wurde, kann es sein, dass es nicht vervollständigt werden kann, ohne Zeilen- oder Spaltenbedingungen zu verletzen:

1	4	2	
			3

3.2.8 Definition: Zeilenmatrix des Lateinischen Quadrats

Die Zeilenmatrix des Lateinischen Quadrats ist eine alternative Möglichkeit ein solches Quadrat zu betrachten. Diese ist eine $(3 \times n^2)$ Matrix, in der jede Spalte aus einem Zeilenindex i, einem Spaltenindex j und dem Element in der Position (i, j) besteht.

1	4	2	3
2	1	3	4
4	3	1	2
3	2	4	1

Z: 1111222233334444
S: 1234123412341234
E: 1423213443123241

Die Bedingung an ein Lateinisches Quadrat ist Äquivalent mit der Bedingung, dass in je zwei Zeilen der Zeilenmatrix alle n^2 möglichen geordneten Paare (i, j) vertikal gesehen genau einmal auftreten.
Die Zeilen der Zeilenmatrix können beliebig permutiert werden, man erhält immer ein Lateinisches Quadrat.
Insbesondere entspricht jedes partielle Lateinische Quadrat einer partiellen Zeilenmatrix.

3.2.9 Definition: konjugiertes Lateinisches Quadrat

Zwei Lateinische Quadrate, die sich nur durch Zeilenpermutation unterscheiden, nennt man konjugierte Lateinische Quadrate.

Insbesondere ist ein konjugiertes (partielles) Lateinisches Quadrat wieder ein (partielles) Lateinisches Quadrat. Und ein solches partielles Quadrat kann genau dann vervollständigt werden, wenn ein dazu Konjugiertes vervollständigt werden kann.

3.2.10 Definition: $(r \times n)$ Lateinisches Rechteck

Sei $1 \leq r < n$. Ein $(r \times n)$ Lateinisches Rechteck ist ein partielles Lateinisches Quadrat, in dem die ersten r Zeilen vollständig gefüllt sind, und die restlichen $(n-r)$ Zeilen leer sind.

3.3 Heiratssatz

Der Satz von Hall, auch Heiratssatz genannt, war der Ausgangspunkt des Gebietes, welches heute unter Matching-Theorie bekannt ist.
Der Satz beruht auf dem Resultat eines Beispiels, von dem er auch den Namen „Heiratssatz“ bekam:

> Es ist eine Menge $1, \ldots, n$ von Mädchen und eine Menge X von Jungen gegeben. Immer wenn $x \in A_i$ ist, dann sind das Mädchen i und der Junge x daran interessiert zu heiraten. Das heißt A_i ist die Menge der möglichen Heiratskandidaten von dem Mädchen i. Wann kann man nun eine Massenhochzeit veranstalten, an der jedes Mädchen einen Jungen heiratet den es mag?

3.3.1 System von verschiedenen Vertretern

Sei X eine endliche Menge und $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Teilmengen von X, die nicht alle verschieden sein müssen. Die Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heißt ein System von verschiedenen Vertretern für $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, falls die x_i verschiedene Elemente von X sind, mit $x_i \in A_i$ für alle i.

3.3.2 Definition: kritische Familie

Sei $A_1, \ldots, A_n$, mit $A_i \neq \emptyset$, ein Familie von Teilmengen von einer Menge X.
Eine Unterfamilie von l Mengen A_i, mit $1 \leq l \leq n$ heißt kritische Familie, falls ihre Vereinigung genau l Elemente enthält.

3.3.3 Satz von Hall

Sei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein Familie von nichtleeren Teilmengen einer endlichen Menge X. Ein System von verschiedenen Vertretern für $A_1, A_2, \ldots, A_n$ existiert genau dann, wenn die Bedingung (H) erfüllt ist.
(H): $\forall 1 \leq m \leq n$: jede Vereinigung von m Mengen A_i enthält mindestens m Elemente.

3.3.4 Beweis $\Leftarrow$

Diese Richtung des Beweises ist klar.

3.3.5 Beweis $\Rightarrow$

Wir zeigen den Satz durch Induktion über n:

- Induktionsbeginn
  $n = 1$:
  $m = 1$, da $A_1 \neq \emptyset$ gilt, dass es mindestens ein Element enthält, also erfüllt die Familie A_1 (H).

- Induktionsvoraussetzung
  (H) sei erfüllt für $m = (n-1) \Rightarrow \exists$ ein System von verschiedenen Vertretern für $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$.

- Induktionsschritt
  $n - 1 \to n$
  Es gilt zu zeigen, dass wenn (H) für $m = n$ erfüllt ist $\overset{!}{\Rightarrow} \exists$ ein System von verschiedenen Vertretern für $A_1, \ldots, A_n$.

1. Fall: Es gibt keine kritische Familie

   Sei x ein beliebiges Element von A_n, das wir aus der Grundmenge X entfernen. Nun betrachten wir die Familie $A_1', A_2', ..., A_{n-1}'$, mit $A_i' := A_i \setminus x$.
   Da es keine kritische Familie gibt, wird die Vereinigung von $m \leq n-1$ Mengen A_i auch ohne x mindestens m Elemente enthalten $\overset{IV}{\Rightarrow} \exists x_1, ..., x_{n-1}$ System von verschiedenen Vertreter für $\{A_1', A_2', ..., A_{n-1}'\}$.
   Setzen wir nun $x_n = x$, so ist $(H) \forall 1 \leq m \leq n$ erfüllt, und somit existiert ein System von verschiedenen Vertretern für die gesamte Familie.

2. Fall: Es gibt eine kritische Familie

   Wir nummerieren die Mengen A_i so um, dass $\{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$ eine kritische Familie ist. Wir bezeichnen $\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^{l} A_i$ und es gilt $|\tilde{X}| = l$.
   Da $l < n \Leftrightarrow l \leq n-1$ ist die Bedingung (H) für $(n-1)$ erfüllt, und somit existiert ein System von verschiedenen Vertretern $x_1, \ldots, x_l$ von $\tilde{X}$ für $A_1, A_2, \ldots, A_l$ mit $x_i \in A_i, \forall i \leq l$.
   Wir betrachten nun die Restfamilie $A_{l+1}, \ldots, A_n$, welche keine kritischen Familien sind. Davon nehmen wir m beliebige Stücke und wissen wegen (H), dass die Vereinigung von $\tilde{X}$ mit den m weiteren Mengen mindestens $m + l$ Elemente enthält. Daher müssen die m Mengen mindestens m Elemente außerhalb von $\tilde{X}$ enthalten. Das heißt nun, dass die Bedingung (H) für die Mengen $A_{l+1} \setminus \tilde{X}, \ldots, A_n \setminus \tilde{X}$ erfüllt ist $\overset{IV}{\Rightarrow} \exists$ ein System verschiedener Vertreter für $A_{l+1}, \ldots, A_n$, welches von X disjunkt ist.
   Vereinigt man nun beide Systeme, erhält man ein System verschiedener Vertreter für alle A_i und der Beweis ist beendet.

3.4 Lemma 1

Jedes $(r \times n)$ – Lateinische Rechteck mit $r < n$ kann zu einem $((r+1) \times n)$ – Lateinischen Rechteck erweitert werden.

3.4.1 Beweis

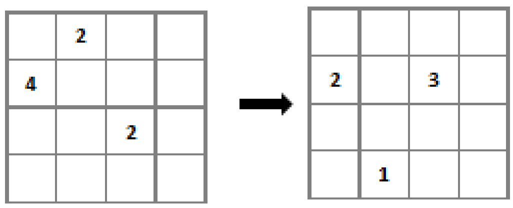
Für den Beweis zu diesem Lemma verwenden wir den Satz von Hall.
Sei A_j die Menge der Zahlen, die nicht in der Spalte j auftreten. Jedes A_j enthält genau $(n-r)$ verschiedene Elemente. Jedes Element kommt in den ersten r Zeilen genau r mal vor, deshalb gibt es genau $(n-r)A_j$'s, in denen es noch enthalten ist.
Wählt man nun m von den A_j's aus, so enthalten sie zusammen $m*(n-r)$ Elemente.
Ist $m < (n-r)$ so enthält die Vereinigung mindestens $(n-r)$ Elemente, das heißt mehr als m verschiedene Elemente.
Ist $m > (n-r)$ so hat man einmal $(n-r)$ verschiedene Elemente von einem A_j, und da ein Element nur in $(n-r)A_j$'s enthalten sein kann, müssen noch mindestens $(m-(n-r))$ verschiedene Elemente dazukommen, das heißt wir haben insgesamt mindestens m verschiedene Elemente.
Somit ist die Bedingung (H) erfüllt, welche impliziert, dass es ein System von verschiedenen Vertretern für die Zeile $(r+1)$ gibt.

3.5 Lemma 2

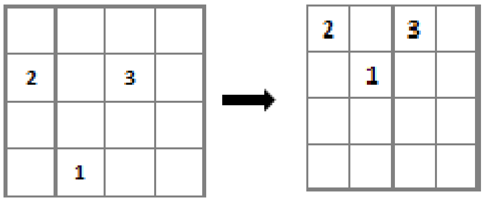
Jedes partielle Quadrat der Ordnung n mit höchstens $(n-1)$ gefüllten Feldern und höchstens $\frac{n}{2}$ verschiedenen Elementen kann zu einem lateinischen Quadrat der Ordnung n vervollständigt werden.

3.5.1 Beweis

Um den Beweis zu erleichtern bringen wir unser Problem zunächst in eine andere Form. Durch Permutation der Zeilenmatrix kann man das partielle Lateinische Quadrat in ein konjugiertes partielles Lateinisches Quadrat umformen, in dem höchstens $\frac{n}{2}$ Zeilen Elemente enthalten.

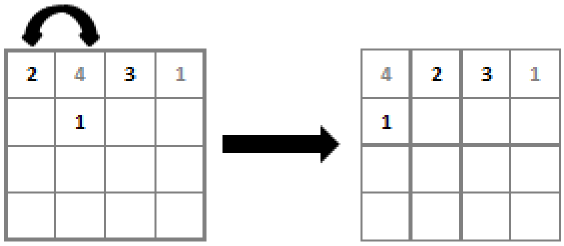


Nun vertauschen wir die Zeilen, sodass wir sie in einer absteigenden, bezüglich der gefüllten Felder, Form erhalten. Das heißt wir können annehmen, dass nur die ersten r Zeilen Einträge enthalten, wobei $r \leq \frac{n}{2}$.



Wir definieren uns f_i als Anzahl der gefüllten Felder in Zeile i. Daraus erhalten wir, dass $f_1 \geq f_{\geq} ... \geq f_r > 0$ und $\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n-1$.
Nun vervollständigen wir die Zeilen $1, \ldots, r$ Schritt für Schritt, bis wir ein $(r \times n)$-Lateinisches Rechteck erhalten, welches wir laut Lemma 1 zu einem vollständigen Lateinischen $(n \times n)$ Quadrat erweitern können.

Angenommen wir haben die Zeilen $1, \ldots, l-1 < r$ bereits gefüllt. In Zeile l sind nun f_l gefüllte Felder, welche wir durch Permutation der Spalten an das like Zeilenende bringen.



Um nun die l –te Zeile zu vervollständigen wenden wir wieder den Satz von Hall an.

Vorbereitungen:
Sei X die Menge der Elemente, die nicht in Zeile l auftreten. $|X| = n - f_l$.
Für $j = 1, \ldots, n - f_l$ definieren wir uns A_j als die Menge der Elemente von X, welche nicht in der j –ten Spalte enthalten sind.
Nun müssen wir zeigen, dass die Bedingung (H) für $A_1, \ldots, A_{n-f_l}$ erfüllt ist.

Behauptung:
(G) $n - f_l - l + 1 > l - 1 + \sum_{i=l+1}^{r} f_i$

1. Fall: $l = 1$:

   $(G) \Leftrightarrow n - f_1 > \sum_{i=2}^{r} f_i \Leftrightarrow n > \sum_{i=1}^{r} f_i$

2. Fall: $f_{l-1} = 1$:

   $\Rightarrow f_l = f_{l+1} = ... = f_r = 1 \Rightarrow (G) \Leftrightarrow n > l + r - 1$ gilt immer, da
   $l \leq r \leq \frac{n}{2} \Rightarrow l + r - 1 \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 1 = n - 1 < n$

3. Fall: $f_{l-1} \geq 2$:

   $f_1 + f_2 + ... + f_{l-1} \geq (l-1)f_{l-1} \geq 2(l-1)$ und
   $n > f_1 + ... + f_r \geq 2(l-1) + f_l + \sum_{i=l+1}^{r} f_i \Leftrightarrow (G)$

Nun wählen wir m dieser Mengen A_j aus, mit $1 \leq m \leq n - f_l$. Wir können die Spalten so permutieren, dass sich alle mA_j's am linken Rand befinden. Mit B bezeichnen wir die Vereinigung der A_j's.

Um die Bedingung (H) zu erfüllen, müssen wir also zeigen, dass $|B| \geq m$ ist.

Sei c die Anzahl der Felder in den ersten m Spalten, welche Elemente von X enthalten. Oberhalb der Zeile l gibt es maximal $(l-1)m$ solche Elemente, unterhalbe gibt es maximal $f_{l+1} + ... + f_r$ solche Elemente. Daraus folgt, dass $c \leq (l-1)m + f_{l+1} + ... + f_r$.
Andererseits gilt aber auch, dass jedes $x \in X \setminus B$ in den ersten m Spalten auftritt, woraus folgt, dass $c \geq m(|X| - |B|)$.
$\Rightarrow |B| \geq |X| - \frac{c}{m} = n - f_l - \frac{c}{m} \geq n - f_l - l + 1 - \frac{1}{m}(f_{l+1} + ... + f_r)$
Daraus folgt: $|B| \geq m$, falls $\Leftrightarrow n - f_l - l + 1 - \frac{1}{m}(f_{l+1} + ... + f_r) > m - 1$, und das ist gleichwertend mit $\Leftrightarrow m(n - f_l - l + 2 - m) > f_{l+1} + ... + f_r$

Behauptung:
(K) $m(n - f_l - l + 2 - m) > f_{l+1} + ... + f_r$

1. Fall: $m = 1 \vee m = n - f_l - l + 1$:

   $(K) \Leftrightarrow n - f_l - l + 1 > l - 1 + f_{l+1} + ... + f_r \geq f_{l+1} + ... + f_r$ wegen (G)

2. Fall: $m \in (1, n - f_l - l + 1)$:

   $m(n - f_l - l + 2 - m)$ ist eine quadratische Funktion mit negativem Leitkoeffizienten, das heißt, die Funktion wird zwischen 2 Randpunkten immer größer oder gleich groß sein als die Randpunkte selber, also ist (K) wieder erfüllt.

3. Fall: $m > n - f_l - l + 1$:

   Jedes Element $x \in X$ ist in höchstens $(l-1) + f_{l+1} + ... + f_r$ Zeilen enthalten, daher kann es auch nur in höchstens $(l-1) + f_{l+1} + ... + f_r$ Spalten auftreten.
   Nun ist aber $(l-1) + \sum_{i=l+1}^{r} f_i < n - f_l - l + 1 < m$, das heißt x ist sicher in einem der A_j's enthalten.
   In diesem Fall ist $X = B$ also $m \leq n - f_l \leq |X| = |B| \Leftrightarrow (K)$ gilt.

Nun haben wir gezeigt, dass (K) gilt, und daher ist $m \leq |B|$.

Nun haben wir die Vorbereitungen abgeschlossen und kommen zum wichtigsten Satz dieser Seminararbeit. Trevor Evans hat sich schon 1960 mit lateinischen Quadraten beschäftigt und sich die Frage gestellt, ob jedes partielle Lateinische Quadrat mit weniger als n Einträgen immer vervollständigt werden kann. Evans Behauptung, eine Vervollständigung wäre immer möglich, wurde als Evans-Vermutung bekannt. Doch es blieb nicht nur eine Vermutung. Es gibt viele verschiedene Beweise zu diesem Satz, ein sehr schöner stammt von Bohdan Smetanjuk aus dem Jahr 1981.

3.6 Satz

Jedes partielle Lateinische Quadrat der Ordnung n, in dem höchstens $(n-1)$ Felder gefüllt sind, kann immer zu einem Lateinischen Quadrat derselben Ordnung vervollständigt werden.

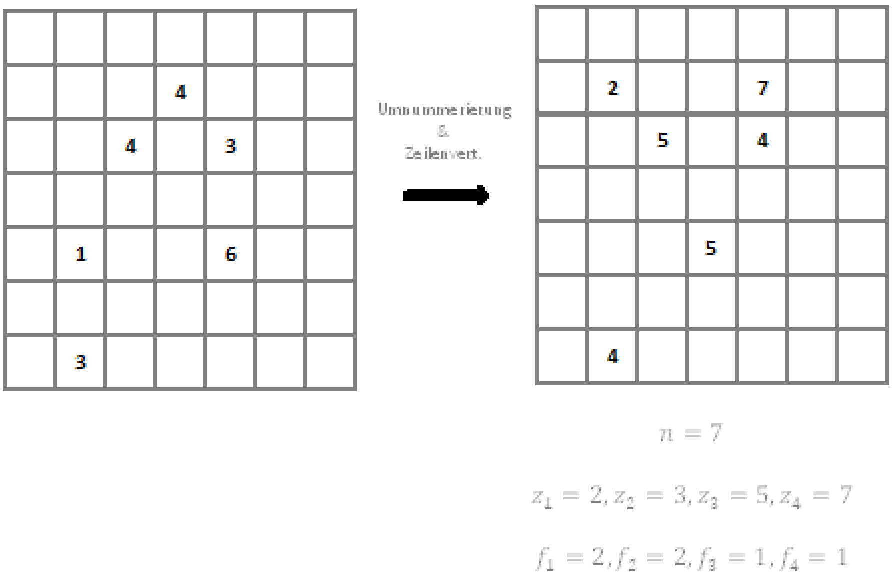
3.6.1 Beweis

Wir führen einen Beweis durch Induktion über n durch.

- Induktionsbeginn
  Für den Fall, dass $n \leq 2$ ist der Beweis klar.

- Induktionsvoraussetzung
  Ein partielles Lateinisches Quadrat der Ordnung $(n-1)$ mit höchstens $(n-2)$ Einträgen kann zu einem vollständigen Lateinischen Quadrat erweitert werden.

- Induktionsschritt
  $n-1 \to n$
  Es gilt zu zeigen, dass ein partielles Lateinisches Quadrat der Ordnung n mit höchstens $(n-1)$ Einträgen immer zu einem vollständigen Lateinischen Quadrat erweitert werden kann.
  Seien nun höchstens $(n-1)$ Felder des partiellen Lateinischen Quadrats gefüllt.
  Wir können annehmen, dass diese $(n-1)$ gefüllten Felder in $r \leq n-1$ verschiedenen Zeilen liegen, welche wir mit $z_1, z_2, ..., z_r$ bezeichnen. Weiters bezeichnen wir mit f_i die Anzahl der gefüllten Felder in der Zeile z_i, wobei $f_1, ..., f_r > 0$ ist und $\sum_{i=1}^{r} f_i < n$ gilt.
  Weiters können wir auch annehmen, dass mehr als $\frac{n}{2}$ Felder gefüllt sind, denn für den Fall, dass maximal $\frac{n}{2}$ Felder gefüllt sind können wir Lemma 2 anwenden und der Beweis wäre vollendet.
  Da mehr als $\frac{n}{2}$ verschiedene Elemente auftreten, wissen wir, dass mindestens ein Element davon nur einmal vorkommt.
  Wir möchten nun, dass das Element n nur einmal auftritt. Dies erreichen wir durch Umnummerierung der Elemente. Weiters möchten wir erreichen, dass das nur einmal auftretende Element n in der Zeile z_1 liegt, was wir leicht durch eine Zeilenvertauschung erreichen können.



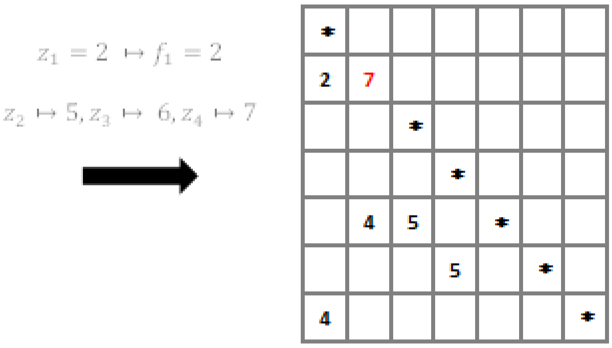
Nun möchten wir, dass alle gefüllten Felder unterhalb der Diagonale liegen, außer das Element n soll auf der Diagonale liegen, was wir folgendermaßen erreichen:

1. Wir vertauschen die Zeilen so, dass die Zeile z_1 in der Position f_1 liegt.

2. Wir permutieren die Spalten, sodass sich alle Elemente der Zeile z_1 am linken Rand befinden, das Element n wird auf die Diagonale vertauscht.

3. Für die restlichen Zeilen $z_2, ..., z_r$ führen wir folgende Vertauschungen durch: $z_i \to 1 + \sum_{j=1}^{i} f_i$ $\forall i \in 2, ...r$

4. Wir permutieren die Spalten so, dass die gefüllten Felder in der Zeile z_i so weit links wie möglich stehen, ohne die oberhalb bereits geänderten Zeilen wieder zu vertauschen.



Um die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können, entfernen wir den Eintrag n aus der Zeile z_1 und entfernen die 1. Zeile und die letzte Spalte. Das kann man machen, da sich nach dem Entfernen des n-ten Elements sowieso keine Einträge mehr darin befinden.
Nun können wir das Quadrat beliebig vervollständigen. Danach fügen wir wieder unses leere letzte Spalte hinzu.

Wir möchten nun, dass jedes Element an der Stelle $(k, k+1)$ $\forall k \in [1, n-1]$ immer das Element n ist.
Dazu entwerfen wir uns folgende Konstruktion:
Sei $k \in [1, n-1]$ und $x_{i,j}$ sei das Element an der Stelle (i, j)

1. Trage in das Feld (k, n) den Wert n ein.

2. Tausche $x_{k,k+1}$ mit dem letzten Element der Zeile.

3. Falls es ein $j \in [1, k)$ gibt, sodass $x_{k,n} = x_{j,n}$ gilt, tauschen wir den Eintrag $x_{j,n}$ mit $x_{j,k+1}$. Falls es weiters ein $j' \in [1, j)$ gibt, sodass $x_{j,n} = x_{j',n}$ gilt, tauschen wir den Eintrag $x_{j',n}$ mit $x_{j',k+1}$. Diesen Algorithmus führen wir fort, bis es kein j^l mehr gibt, sodass $x_{j^{(l-1)}} = x_{j^l}$.

Diese Konstruktion ermöglicht uns, dass in der letzten Spalte nie zwei gleiche Elemente stehen.

2	3	4	1	6	5	7
5	6	1	4	2	3	
1	2	3	6	5	4	
6	**4**	**5**	2	3	1	
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	6	5	3
5	6	1	4	2	3	7
1	2	3	6	5	4	
6	**4**	**5**	2	3	1	
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	6	5	3
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	6	5	4	7
6	**4**	**5**	2	3	1	
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	6	5	3
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	5	4	6
6	**4**	**5**	2	3	1	7
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	6	5	3
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	5	4	6
6	**4**	**5**	2	7	1	3
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	**4**	**5**	2	7	1	3
3	1	6	**5**	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	**4**	**5**	2	7	1	3
3	1	6	**5**	4	2	7
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	**4**	**5**	2	7	1	3
3	1	6	**5**	4	7	2
4	5	2	3	1	6	

Am Schluss bleibt nur mehr das rechte untere Eckstück über, in welches wir den Wert n eintragen.

Nun haben wir ein $((n-1) \times n)$ – Lateinisches Rechteck, zu dem wir wieder unsere zuvor weggedachte leere erste Zeile hinzufügen können, für die es nun eine eindeutige Vervollständigung gibt.

2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	**4**	**5**	2	7	1	3
3	1	6	**5**	4	7	2
4	5	2	3	1	6	7

7	3	1	6	5	2	4
2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	**4**	**5**	2	7	1	3
3	1	6	**5**	4	7	2
4	5	2	3	1	6	7

Um am Ende das vollständige Lateinische Quadrat zum ursprünglich gegebenen partiellen Lateinischen Quadrat zu bekommen, müssen wir nur noch die Element-, Zeilen- und Spaltenvertauschungen rückgängig machen.

			4			
		4		3		
	1			6		
	3					

3	7	2	6	4	5	1
2	6	1	4	7	3	5
1	5	4	2	3	6	7
4	2	6	1	5	7	3
5	1	7	3	6	2	4
7	4	3	5	2	1	6
6	3	5	7	1	4	2