Gitterwege und Determinanten

Seminar aus reiner Mathematik, WS 13/14

Eva Heider

Dezember 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese Seminararbeit beschäftigt sich mit dem Lemma von Gessel-Viennot, dessen Verwendung zur Herleitung der wesentlichen Eigenschaften der Determinante und mit dem ursprünglichen Problem, das Ausgangspunkt dieses Lemmas war. Zu Beginn werden die benötigten Begriffe erklärt, bevor das Lemma sowie eine Anwendung formuliert und bewiesen werden. Inhaltlich habe ich mich an das Kapitel 29 "Gitterwege und Determinanten"des "BUCH der Beweise"von Martin Aigner und Günter M. Ziegler (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010, 3. Auflage) gehalten.

2 Einführung

Zu Beginn stellt sich natürlich die Frage, wie sich ein *Lemma* von einer einfachen mathematischen Aussage unterscheiden lässt.
Erstens sollte es vielfältig anwendbar sein, das heißt es muss zum Lösen von Problemen verwendet werden können, die nichts miteinander zu tun zu haben scheinen.
Außerdem sollte die Aussage dem Leser als vollkommen logisch erscheinen, fast so als würde man sich wundern, was es groß zu beweisen gäbe.
Und zu guter Letzt sollten ein Lemma und sein Beweis auf eine gewisse Art schön und anschaulich sein.

2.1 Begriffserklärungen

- Eine *Permutation* ist eine bijektive Abbildung von einer n-elementigen Menge in sich selbst. Für $n \geqslant 2$ lässt sich jede Permutation als Produkt von endlich vielen Transpositionen schreiben. Jede Permutation hat das Signum (Vorzeichen) 1 oder -1, abhängig von der geraden bzw. ungeraden Anzahl von Transpositionen.
- Eine *Transposition* vertauscht nur genau zwei Zahlen i, j mit $i \neq j$ aus der Menge und lässt die übrigen gleich.
- Ein *Graph* ist ein Tupel $G = (V, E)$, wobei V die Knoten- und $E \subseteq V \times V$ die Kantenmenge ist und $\forall\, e \in E$ gilt, dass e zwei Knoten (bzw. Ecken) $u, v \in V$ verbindet.
- Man spricht von einem *gerichteten* Graphen, wenn G eine geordnete Menge an Knotenpaaren besitzt, die jeweils in einer bestimmten Richtung verbunden werden, also jede Kante einen Start- und Endknoten hat.
- Enthält ein gerichteter Graph keinen (orientierten) Zyklus, so nennt man ihn *azyklisch*.
- Für einen *gewichteten* Graphen wird zusätzlich jeder Kante $e \in E$ ein Wert $\omega(e) \in \mathbb{R}$ zugeordnet. $\omega(e)$ nennt man dann das *Gewicht* von e.

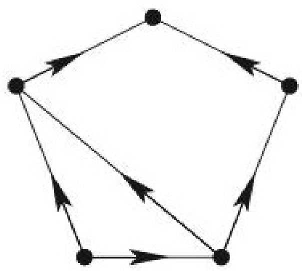


Abbildung 1: azyklischer Graph

- Ein Graph heißt *bipartit*, wenn seine Knotenmenge als $V = V_1 \cup V_2$ dargestellt werden kann, wobei V_1 und V_2 Mengen sind, in denen keine Ecke mit einer anderen verbunden ist, also *unabhängige* Knotenmengen sind.

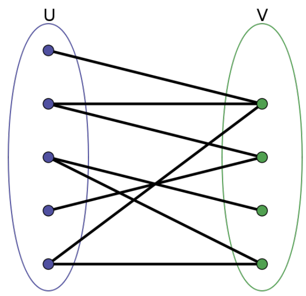


Abbildung 2: bipartiter Graph, nicht vollständig

- Eine Abbildung $\pi : A \to A$ mit $A \neq \emptyset$ heißt genau dann eine *Involution*, wenn $\forall\, x \in A$ gilt: $\pi(\pi(x)) = x$.
- Für einen gerichteten Graphen heißt M eine *Wegematrix*, wenn $\forall\, i, j \in \{1, ...n\}$ gilt, dass $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls es einen Weg von } i \text{ nach } j \text{ gibt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- Seien A und B zwei Mengen von jeweils n Ecken, $A = \{A_1, ..., A_n\}$

und $B = \{B_1, ..., B_n\}$, die aber nicht unbedingt disjunkt sein müssen. Ein *Wegesystem* P von A nach B besteht aus einer Permutation σ zusammen mit n Wegen $P_i : A_i \to B_{\sigma(i)}$ für $i = 1, ..., n$. Wir können somit sagen $\text{sign}P = \text{sign}\sigma$.

- Wir nennen ein Wegesystem P *eckendisjunkt*, falls alle Wege von P paarweise eckendisjunkt sind, das heißt falls P_i und P_j keine gemeinsamen Ecken besitzen $\forall\, i \neq j$.
- Wenn man einen endlichen, azyklischen, gewichteten und gerichteten Graphen und eine Wegematrix M hat, so dass M eine *Binomialmatrix* ist, das heißt die Einträge der Matrix sind alles Binomialkoeffizienten, dann nennt man $\det M$ eine *Binomialdeterminante*.

2.2 Ausgangspunkt

Wir betrachten die Permutationsdarstellung der Determinante einer reellen $(n \times n)$-Matrix $M = (m_{ij})_{i,j=1}^{n}$:

$$\det M = \sum_{\sigma} \text{sign}\sigma\, m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} ... m_{n\sigma(n)} \tag{1}$$

wobei σ alle Permutationen von $\{1, 2, ..., n\}$ durchläuft.

Nun nehmen wir an, dass $G = (V, E)$ ein gewichteter, gerichteter, bipartiter und azyklischer Graph mit Eckenmenge $E = \{A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n\}$ und Kantenmenge V ist. Den Zeilen von M ordnen wir die Eckpunkte $A_1, ..., A_n$, den Spalten von M die Eckpunkte $B_1, ..., B_n$ zu, und für jedes Paar $(i, j) \in \{1, ...n\}^2$ geben wir der gerichteten Kante von A_i nach B_j das Gewicht m_{ij}, sie ist also mit dem (i, j)-ten Eintrag der Matrix M gewichtet.

$$\text{Beispiel: } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Dadurch können wir die Formel (1) wie folgt interpretieren:

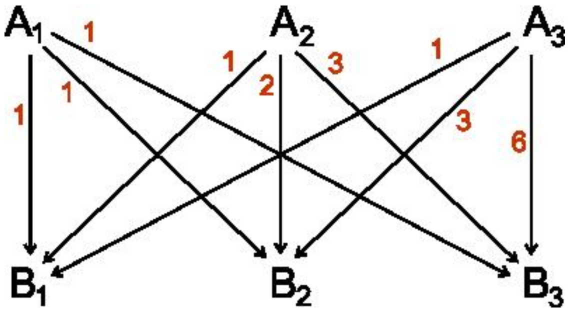


Abbildung 3: Beispiel für eine 3×3-Matrix

- Die linke Seite ist die Determinante der Wegematrix M, wobei der (i, j)-te Eintrag m_{ij} das Gewicht des eindeutigen gerichteten Weges von A_i nach B_j ist.
- Die rechte Seite ist die gewichtete Summe über alle eckendisjunkten Wegesysteme von $A = \{A_1, ..., A_n\}$ nach $B = \{B_1, ..., B_n\}$, wobei das Vorzeichen von der Anzahl von Transpositionen, aus denen σ zusammengesetzt ist, abhängt. So ein System P_σ sei durch die Wege $A_1 \to B_{\sigma(1)}, ..., A_n \to B_{\sigma(n)}$ gegeben. Es gilt, dass das Gewicht des Wegesystems P_σ das Produkt der Gewichte der einzelnen Wege ist:
$$\omega(P_\sigma) := \omega(A_1 \to B_{\sigma(1)})...\omega(A_n \to B_{\sigma(n)}).$$

Durch diese Interpretation erhalten wir für die Formel (1)

$$\det M = \sum_\sigma \operatorname{sign}\sigma\, \omega(P_\sigma) \tag{2}$$

die gewichtete signierte Summe über alle eckendisjunkten Wegesysteme von A nach B.

Genau hier setzt das Lemma von Gessel-Viennot an und verallgemeinert die Situation auf beliebige endliche, azyklische, gerichtete und gewichtete Graphen.
Zuvor jedoch noch etwas Notation.

2.3 Notation

Sei im Folgenden $G = (V, E)$ ein endlicher, azyklischer, gerichteter Graph mit reellem Gewicht $\omega(e)$ für jede Kante $e \in E$. Ist P ein gerichteter Weg von V_i nach V_j, kurz $P : V_i \to V_j$, so definiert man sein Gewicht als

$$\omega(P) := \prod_{e \in P} \omega(e) \tag{3}$$

und falls P ein trivialer Weg $V_i \to V_i$ der Länge 0 ist, setzt man das Gewicht $\omega(P) := 1$.

Seien nun $A = \{A_1, ..., A_n\}$ und $B = \{B_1, ..., B_n\}$ zwei Teilmengen von E mit jeweils n Ecken, allerdings müssen A und B nicht disjunkt sein, dann ordnet man den A und B die Wegematrix $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ mittels

$$m_{ij} := \sum_{P\colon A_i \to B_j} \omega(P) \tag{4}$$

zu. Das heißt m_{ij} ist die Summe der Gewichte aller möglichen gerichteten Wege von A_i nach B_j.

Nun assoziiert man P mit einer Permutation $\sigma \in S_n$ und n Wegen $P_i : A_i \to B_{\sigma(i)}$ für $i = 1, ..., n$. Dabei sei $\text{sign} P = \text{sign} \sigma$. Das Gewicht des Wegesystems P sei dann das Produkt der Gewichte der einzelnen Wege, also

$$\omega(P) := \prod_{i=1}^{n} \omega(P_i). \tag{5}$$

Nach (3) heißt das heißt allerdings wieder, dass das Gewicht von P das Produkt der Gewichte aller Kanten im Wegesystem ist, also

$$\omega(P) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{e \in P_i} \omega(e). \tag{6}$$

3 Lemma von Gessel-Viennot

Das Lemma wurde erstmals 1972 von Bernt Lindström bewiesen, blieb aber weitgehend unbeachtet. Erst 1985 wurde es wiederentdeckt und von Ira Gessel und Gerard Viennot zur Lösung verschiedenster Abzählprobleme verwendet.

LEMMA 1. *Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, gewichteter, azyklischer, gerichteter Graph, seien $A = \{A_1, ..., A_n\}$ und $B = \{B_1, ..., B_n\}$ zwei n-Mengen von Ecken, und sei M die Wegematrix von A nach B. Dann gilt*

$$\det M = \sum_{P\text{: } \textit{eckendisjunktes Wegesystem von } A \textit{ nach } B} \mathrm{sign} P\, \omega(P). \tag{7}$$

Beweis. Die Parameterdarstellung der Determinante aus (1) kann man durch einsetzen von (4) auch als

$$\det M = \sum_{\sigma} \mathrm{sign}\sigma \,(\sum_{P_1\colon A_1 \to B_{\sigma(1)}} \omega(P_1))...(\sum_{P_n\colon A_n \to B_{\sigma(n)}} \omega(P_n)) \tag{8}$$

schreiben. Summieren wir über alle $\sigma \in S_n$, so erhalten wir aus (5) unmittelbar die Formel

$$\det M = \sum_{P} \mathrm{sign} P\, \omega(P), \tag{9}$$

worin P alle Wegesysteme von A nach B durchläuft. Das heißt, noch summieren wir über alle möglichen Wege von A nach B, insbesondere auch über die nicht eckendisjunkten Wege. Um die gewünschte Formel (7) zu beweisen, müssen wir also nur mehr zeigen, dass

$$\sum_{P \in N} \mathrm{sign} P\, \omega(P) = 0 \tag{10}$$

gilt, wobei N die Menge aller Wegesysteme bezeichnet, die <u>nicht</u> eckendisjunkt sind.

Wir wollen die Existenz einer fixpunktfreien Involution $\pi : N \to N$ zeigen, sodass für P und πP

$$\omega(\pi P) = \omega(P) \quad \text{und} \quad \mathrm{sign}\pi P = -\mathrm{sign}P \tag{11}$$

gilt. Es hebt sich alles auf, woraus dann (10) und damit die Formel (7) des Lemmas folgen.

Die Involution π wird auf naheliegende Weise definiert. Sei das Wegesystem $P \in N$ mit den Wegen $P_i : A_i \to B_{\sigma(i)}$ gegeben. Nach Definition gibt es ein Paar von Wegen mit einer gemeinsamen Ecke:

- Sei i_0 der minimale Index, sodass P_{i_0} eine Ecke mit einem anderen Weg gemeinsam hat.
- Sei X die erste solche gemeinsame Ecke auf dem Weg P_{i_0}.
- Sei j_0 der kleinste Index ($j_0 > i_0$), sodass P_{j_0} die Ecke X mit dem Weg P_{i_0} gemeinsam hat.

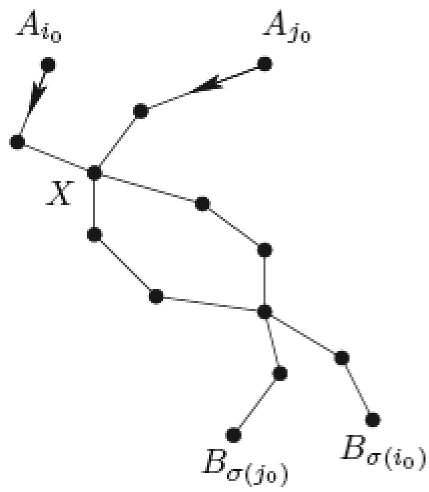


Abbildung 4: zwei Wege mit gemeinsamer Ecke X

Nun konstruieren wir das neue Wegesystem $\pi P = (P_1\prime, ..., P_n\prime)$ (anhand der Figur) wie folgt:

- $P_k\prime = P_k$ für alle $k \neq i_0, j_0$.
- Der neue Weg $P_{i_0}\prime$ geht von A_{i_0} nach X entlang P_{i_0} und von dort nach $B_{\sigma(j_0)}$ entlang P_{j_0}. Analog geht $P_{j_0}\prime$ von A_{j_0} nach X entlang P_{j_0} und wird nach $B_{\sigma(i_0)}$ entlang P_{i_0} fortgesetzt.

Offensichtlich gilt nun $\pi(\pi P) = P$, weil der Index i_0, die Ecke X, und auch der Index j_0 genau dieselben bleiben wie vor Anwenden der Involution. Mit anderen Worten: Verwenden wir die Involution π zweimal, so erhalten wir genau die alten Wege P_i. Da πP und P genau dieselben Kanten verwenden und sich nur die Multiplikationsreihenfolge ändert, haben wir sicherlich $\omega(\pi P) = \omega(P)$. Und schließlich sehen wir, da die neue Permutation $\sigma\prime$ aus der alten durch Multiplikation von σ mit der Transposition (i_0, j_0) erhalten wird, dass $\text{sign}\pi P = -\text{sign}P$ gilt.

$\square$

4 Anwendungen

Allein durch die Konstruktion eines geeigneten Graphen können alle wesentlichen Eigenschaften der Determinante abgeleitet werden. Nun betrachten wir ein besonders eindrucksvolles Beispiel, eine Verallgemeinerung der Produktformel für Determinanten.

4.1 Formel von Binet-Cauchy

SATZ 1. *Ist P eine $(r \times s)-$Matrix und Q eine $(s \times r)-$Matrix mit $r \leqslant s$, so gilt*

$$\det(PQ) = \sum_Z (\det P_Z)(\det Q_Z), \tag{12}$$

wobei P_Z die $(r \times r)$-Untermatrix von P mit Spaltenmenge Z ist und Q_Z die $(r \times r)$-Untermatrix von Q mit den entsprechenden Zeilen Z.

Beweis. Für den Fall $r = s$ erhalte ich einfach die Multiplikativität der Determinante.

Ansonsten konstruieren wir zu P den bipartiten Graphen auf $A = \{A_1, ..., A_r\}$ und $B = \{B_1, ..., B_s\}$ wie zuvor in 2.2, im Beispiel der (3×3)-Matrix, und analog den bipartiten Graphen zu Q auf $B = \{B_1, ..., B_s\}$ und $C = \{C_1, ..., C_r\}$.

Nun betrachten wir den zusammengefügten Graphen, wie in der Figur, dem wir die Wegematrix M von A nach C zuordnen. Der (i, j)-te Eintrag von M ist dann genau

$$m_{ij} = \textstyle\sum_k p_{ik} q_{kj}.$$

Mit anderen Worten, es gilt $M = PQ$.

Noch einmal zur Erklärung, Z ist eine Teilmenge von B mit nur r Elementen.
Da die eckendisjunkten Wegesysteme von A nach C in dem zusammengefügten Graphen offenbar Paaren von Systemen von A nach Z bzw. von Z nach C entsprechen, folgt das Resultat unmittelbar aus dem Lemma

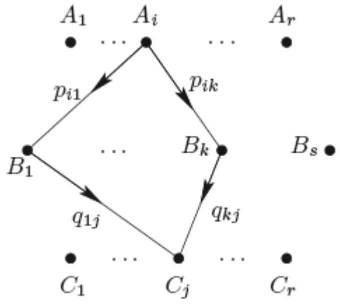


Abbildung 5: zusammengefügter Graph

von Gessel-Viennot, wenn wir nur die Formel $\mathrm{sign}(\sigma\tau) = (\mathrm{sign}\sigma)(\mathrm{sign}\tau)$ berücksichtigen.

$$
\begin{aligned}
&\det(PQ) \\
&= \sum_Z \sum_{PQ\text{: eckendisjunktes Wegesystem von } A \text{ nach } C} \mathrm{sign}(\sigma\tau)\,\omega(PQ) \\
&= \sum_Z \sum_{P_Z\colon A\to Z} \mathrm{sign}\sigma\,\omega(P_Z) \cdot \sum_{Q_Z\colon Z\to C} \mathrm{sign}\tau\,\omega(Q_Z) \\
&= \sum_Z \det(P_Z)\cdot\det(Q_Z)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

□

4.2 Binomialdeterminanten

Eine weitere Anwendung des Lemmas von Gessel-Viennot ist in Aufgaben, die Determinanten mit Abzählproblemen in Verbindung bringen, wobei man immer nach dem selben Schema vorgeht: Man interpretiert die gegebene Matrix als Wegematrix und versucht, die rechte Seite der Gleichung (7) des Lemmas zu berechnen.

Als Beispiel dazu betrachten wir das ursprüngliche Problem, das für Gessel und Viennot der Ausgangspunkt ihres Lemmas war, nämlich Determinanten von beliebigen quadratischen Matrizen im Pascalschen Dreieck zu berechnen.
Formell: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von natürlichen Zahlen mit $a_1 < a_2 < ... < a_n$ und $b_1 < b_2 < ... < b_n$. Berechne die Determinante der Matrix $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$, in der m_{ij} jeweils der Binomialkoeffizient $\binom{a_i}{b_j}$ ist.

Wir betrachten hierzu die Determinante

$$\det\begin{pmatrix} \binom{3}{1} & \binom{3}{3} & \binom{3}{4} \\ \binom{4}{1} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ \binom{6}{1} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 6 & 20 & 15 \end{pmatrix} = 180 + 6 - 60 - 60 = \underline{66}$$

der Matrix, die durch die fettgedruckten Elemente im Pascalschen Dreieck gegeben ist.

1							
1	1						
1	2	1					
1	***3***	3	***1***				
1	***4***	6	***4***	***1***			
1	5	10	10	5	1		
1	***6***	15	***20***	***15***	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Um zur Lösung zu gelangen bringen wir die Binomialkoeffizienten mit Gitterwegen in Verbindung. Dazu betrachten wir ein $(a \times b)$-Gitter, in dem wir von der linken unteren zur rechten oberen Ecke gelangen wollen.

Die Anzahl der beliebigen, in Frage kommenden Wege ist dann genau $\binom{a+b}{a}$, wenn man nur Schritte nach oben und nach rechts erlaubt.

Der Beweis dazu ist klar: Jeden Weg kann man durch b Schritte nach rechts und a Schritte nach oben beschreiben, also z.B. als Folge der Form

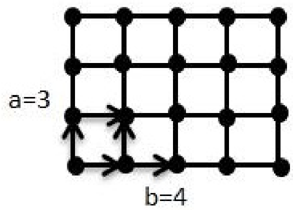


Abbildung 6: Beispiel eines Gitters

OORRROR darstellen, die insgesamt aus $a+b$ Buchstaben besteht, nämlich aus a Os und b Rs. Logischerweise ist die Anzahl der verschiedenen Folgen gleich der Anzahl der Möglichkeiten, a Positionen für den Buchstaben O aus den insgesamt $a+b$ verfügbaren Positionen auszuwählen. Und das ist genau die Zahl $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$.

Nun betrachten wir ein etwas komplizierteres Gitter: A_i sei im Punkt $(0, -a_i)$ und B_j im Punkt $(b_j, -b_j)$ platziert.

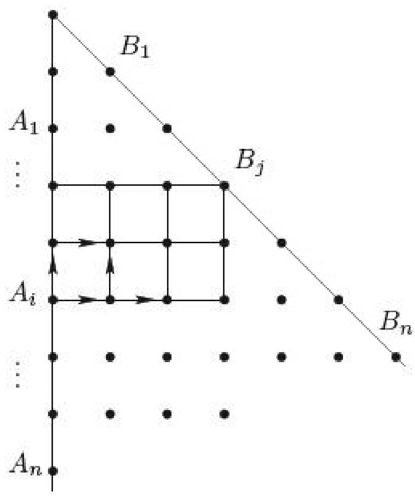


Abbildung 7: Gitter mit Ecken $A_1, ...A_n, B_1, ..., B_n$

Wieder wollen wir die Anzahl der Wege von A_i nach B_j nur unter Berücksichtigung von Schritten nach oben und nach rechts betrachten, und zwar ist das genau die Anzahl $\binom{b_j+(a_i-b_j)}{b_j} = \binom{a_i}{b_j}$.

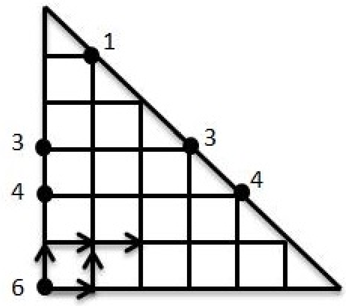
Anders ausgedrückt ist die Matrix der Binomialkoeffizienten M genau die Wegematrix von $A = \{A_1, ..., A_n\}$ nach $B = \{B_1, ..., B_n\}$ in dem gewichteten, gerichteten Gittergraphen, in dem alle Kanten das Gewicht 1 haben und nach oben bzw. rechts gerichtet sind. Nun kann das Lemma von Gessel-Viennot angewendet werden, um die Determinante von M zu berechnen. Jedes eckendisjunkte Wegesystem P von A nach B muss aus Wegen $P_i : A_i \to B_i, \forall\, i$ bestehen, also ist die einzig mögliche Permutation die Identität und diese hat das Vorzeichen $+1$.
Dadurch erhalten wir das Resultat

$$\det(\binom{a_i}{b_j}_{ij}) = \#\text{ mögliche eckendisjunkte Wegesysteme von } A \text{ nach } B$$

Daraus folgt, dass Binomialdeterminanten niemals negativ sind, da die rechte Seite der Gleichung ja etwas zählt. Außerdem erhalten wir aus dem Lemma von Gessel-Viennot die Äquivalenz $\det M = 0 \Leftrightarrow a_i < b_i$ für mindestens einen Index i.

Wenn wir nun zu unserem Beispiel zurückkehren haben wir

$$\det \begin{pmatrix} \binom{3}{1} & \binom{3}{3} & \binom{3}{4} \\ \binom{4}{1} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ \binom{6}{1} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} \end{pmatrix} = \#\text{ eckendisjunkte Wegesysteme}$$

in 

wobei hier $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 6$ und $b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 4$. Hier kann jeder Leser leicht selbst die 66 eckendisjunkten Wegesysteme aufzählen.

(Man beachte, dass der Weg ROO von $3 \to 1$ nicht eckendisjunkt zum Weg RORR von $4 \to 3$ ist!)