Das Bertrandsche Postulat

Doris Lindner

21. Dezember 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Beweis des Bertrandschen Postulats. Beginnen wird die Arbeit mit einer kurzen Vorstellung jener Personen, die sich mit dem Postulat von Joseph Bertrand auseinandergesetzt haben. Des Weiteren werden die Vorraussetzungen, also Definitionen und Hilfmittel, die für die Beweisführung elementar sein werden, angeführt und erläutert. Im Anschuss soll der Beweis von Paul Erdös in fünf Schritten erklärt werden. In diesem Rahmen wird im letzten Kapitel ein Augenmerk auf dessen Bedeutung in der Forschung über Primzahlen näher eingegangen und geklärt welche Rolle das Postulat für die weiteren Entwicklungen der Mathematik haben wird.

2 Personen, die am Beweis der Bertrandschen Postulats beteiligt waren

2.1 Joseph Louis Francois Bertrand

Joseph Bertrand, geboren am 11. März 1822 in Paris (gestorben 5. April 1900) war ein französischer Mathematiker und Pädagoge, der für seine eleganten Anwendungen von Differentialgleichungen auf dem Gebiet der analytischen Mechanik, sowie für seine Arbeiten zur statistischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Oberflächen- und Kurventheorie bekannt ist.
Schon im zarten Alter von neun Jahren sprach Joseph Bertrand fließend Latein und mit elf Jahren war er der jüngste Student an der Elitehochschule *Ecole polytechnique*. Dort erhielt er zum frühest möglichem Zeitpunkt, mit 16 Jahren, einen akademischen Grad und promovierte ein Jahr später in Thermodynamik.
In den Jahren von 1841 bis 1849 erhielt er eine Anstellung als Mathematiklehrer am Gymnasium *Lycee-Louis* und fast zeitgleich, 1844, wurde er Repetitor an der *Ecole polytechnique*. Ab 1852 lehrte Joseph Bertrande am Lyce Henri IV und an der *Ecole normale superieure* und vier Jahre drauf trat er die Professur an.
Bertrand galt als großer Denker seiner Zeit. Im Jahre 1845 vermutete er, dass es für jedes $n \geq 1$ mindestens eine Primzahl p, mit $n < p \leq 2n$ gibt. Seine Vermutung wurde fünf Jahre später von Tschebyschow bewiesen. Seine Arbeit über Gruppentheorie beeinflusste Augustin Louis Cauchy und im Jahre 1855 übersetzte er die Arbeiten von Gauß über Fehlertheorie und die Methode der kleinsten Quadrate ins Französische. Des Weiteren stammt das Bertrandsche Paradoxon in der Wahrscheinlichkeitsrechnung von ihm und als Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschenschaften publizierte er eine Vielzahl von Lehrbüchern über Arithmetik, elementarer Algebra, Analysis und Thermo- und Elektrodynamik. [vgl. 1]

2.2 Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow

Pafnuti Tschebyschow (geboren am 16. Mai 1821; gestorben am 8. Dezember 1894) gilt als einer der bedeutensten russischen Mathematiker des 19. Jahrhunderts.
Als eines von neun Kindern genoß er das Privileg mit 10 Jahren von einem der besten privaten Mathematiklehrer, P.N. Pogorelski, in Moskau unterrichtet zu werden. Im Alter von 16 Jahren studierte an der Lomonossow-Universität bei Nikolai Dmitrijewitsch Braschman und Nikolai Zernow. Zehn Jahre später verteidigte er seine Magisterdissertation und reicht im Jahr darauf in St. Petersburg seine Dissertation ein, worauf ihm sofort eine Stelle an der Universität zugesagt wurde.
Tschebyschow spezialisierte sich auf den Gebieten der Interpolation, Approximation, Funktionentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Zahlentheorie (insbesondere Primzahltheorie), Mechanik und Ballistik. Elementare und wichtige Elemente auf diesen Teilgebieten der Mathematik sind nach ihm benannt. Beispiele hierfür wären die Tschebyschow Polynome, die Tschebyschow- Ungleichung, die Tschebyschow-Distanz, das Tschebyschow-Filter, der Satz von Tschebyschow, der Satz von Bertrand-Tschebyschow, sowie die Tschebyschow-Summenungleichung und die Tschebyschow-Funktion und die Supremumsnorm, die auch manchmal Tschebyschow-Norm genannt wird. Ferner ist er Begründer der St. Petersburger Mathematischen Schule und war Mitglied der Preußischen, italienischen und schwedischen Akademie der Wissenschaften. [vgl. 2]

2.3 Paul Erdös

Ëin Mathematiker ist eine Maschine, die Kaffee in Theoreme umwandelt."

Selbstironisch in Bezug auf seinen Kaffeekonsum zitiert DIE ZEIT, 05/2008 S. 31, im Jahr der Mathematik, einen der bedeutendsten und außergewöhnlichsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, Paul Erdös.
Als einziger Sohn (geboren am 26. März 1913 in Budapest) eines jüdischen Mathematiklehrerpärchens kam er schon sehr früh mit der hohen Kunst der Mathematik in Berührung. Mit drei Jahren erlernte er das Rechnen und mit vier konnte er Freunden der Familie im Kopf ausrechnen, wie viele Sekunden sie schon auf der Erde verbrachten. Aus Angst vor ansteckenden Krankheiten erlaubten es ihm seine Eltern nicht eine öffentliche Schule zu besuchen. So erhielt er Privatunterricht bis zum Alter von 17 Jahren. 1930 schrieb sich Paul Erdös an der Universität *Lorand-Eötvös-Universität* ein und nach nur vier Jahre (1934) erlangte er den Doktortitel in Mathematik. Noch im selben Jahr erhielt er ein Stipendium an der Universität in Manchester wo er eng mit dem englischen Mathematiker Harold Davenport zusammen arbeitete. 1938 nahm er seine erste Position in den USA, als Stipendiat, in Princeton (New Jersey) ein und folgte bald darauf einer Einladung von Ulam nach Madison. Um diese Zeit begann er die Gewohnheit zu entwickeln, von Campus zu Campus zu reisen. Es hielt ihn nie lange an einem Ort, und er reiste bis zu seinem Tode zwischen mathematischen Instituten hin und her, um mit verschiedenen Mathematikern zusammenzuarbeiten.

Er veröffentlichte etwa 1500 gemeinsame Artikel, so viele wie kein anderer Mathematiker. Daraus entstand auch die halb scherzhafte Erdös-Zahl. Die 509 Mathematiker, die direkt mit ihm zusammenarbeiteten, haben die Erdöszahl 1; solche, die nicht mit Erdös, aber mit jemandem mit Erdöszahl 1 zusammenarbeiteten, haben die Erdöszahl 2; usw...
Der Mathematiker führte ein materiell einfaches Leben, das der Mathematik gewidmet war. Mit den Preisgeldern, die er gewann, unterstützte er begabte Studenten, spendete das Geld oder verwendete es als Preisgelder für schwierige Aufgaben aus. 1977 stiftete er den israelischen Erdös-Preis, benannt zu Ehren seiner Eltern.

2.3.1 Seine Werke

Erdös Arbeitsgebiete waren hauptsc̈hlich Zahlentheorie und Kombinatorik. Außerdem war er ein Pionier in der Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Argumente in der Zahlentheorie und der Graphentheorie. Erdös war nicht so sehr am Aufbau von Theorien interessiert, sondern an der Lösung spezieller Probleme, mit möglichste einfachen und eleganten Beweisen.
1931 fand er noch als Student in Budapest einen eleganten elementaren Beweis von Bertrands Vermutung, dass es für ein $n \geq 1$ immer eine Primzahl p zwischen n und $2n$ gebe.
1948 erregte er Aufmerksamkeit, als er zusammen mit Atle Selberg einen elementaren Beweis des Primzahlsatzes gab. Auch eine einflussreiche Arbeit über Primzahlzwillinge von 1940 stammt von Erdös und nur sechs Jahre später bewies er gemeinsam mit Arthur Herbert Copeland, dass die nach ihnen benannte Copeland-Erdös-Zahl eine normale Zahl ist.
In der Kombinatorik arbeitete er in der Theorie extremaler Graphen, kombinatorischer Fragen der elementaren Geometrie und in der Ramseytheorie, die das Auftauchen von Ordnungen in genügend großen zufälligen Strukturen vorhersagt. Hier war er am Erdös-Szekeres-Theorem von 1935 beteiligt, das quantitativ sehr viel genauere Angaben in der Ramseytheorie macht. Auerdem brachte er die Idee asymptotischer Abschätzungen aus der Zahlentheorie in die Kombinatorik ein.
Beispiele für seine Ergebnisse in der Kombinatorik sind eine Verallgemeinerung des Happy Ending Theorem mit George Szekeres 1935. In dieser Arbeit wurden von Szekeres auch Sätze von Ramsey wiederentdeckt, die bald darauf von Erdös u. a. zur Ramsey-Theorie ausgebaut wurden. 1957 bewies er den Satz, dass es für alle k, m immer einen Graphen mit der chromatischen Zahl k gibt, in dem alle Zyklen länger als m sind.
In der Mengenlehre wirkte Erdös an der Entwicklung der unendlichen Kombinatorik an führender Stelle mit. Zusammen mit Andras Hajnal, Richard Rado und anderen untersuchte er Partitionseigenschaften von Ordinalzahlen und überabzählbaren Kardinalzahlen und bewies Varianten und Verallgemeinerungen des Satzes von Ramsey.
Erdös erzielte auch wichtige Resultate in der numerischen Mathematik, insbesondere in der Theorie der Approximation von Funktionen, z. B. in einer Arbeit mit Paul Turan 1937, in der sie zeigten, dass die Lagrangeschen Interpolationspolynome einer beliebigen stetigen Funktion im Mittel gegen diese Funktion konvergieren für beliebige Gewichtfunktionen an den aus den Wurzeln eines Systems orthogonaler Polynome gebildeten

Stützstellen. [vgl. 3]

3 Grundlagen

Die in diesem Abschnitt angegebenen Voraussetzungen, die für die Durchführung des Beweises des Bertrandschen Postulats sind aus den Büchern [4],[5] entnommen. Sie stellen lediglich eine Übersicht dar, ohne einzelne Beweise; diese werden als bekannt vorausgesetzt oder können in der angegebenen Literatur nachgeschlagen werden. Elementare Definitionen werden an dieser Stelle nicht eingeführt, hier wird auf die Vorlesung Einführung in die Algebra verwiesen.

3.1 Hilfsmittel

3.1.1 Additionstheorem der Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

3.1.2 Satz von Legendre

Die Zahl n! enthält den Primfaktor p genau $\sum \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ mal.

Beweis: Genau $\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ Faktoren von n = 1*2*3* $\ldots$ *n sind durch p teilbar, was $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$Faktoren liefert. Weiters sind $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$ der Faktoren von n! sogar durch p^2 teilbar, was die nächsten $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$ Primfaktoren p von n! liefert, usw ... [vgl. 5, S. 9]

3.2 Abschätzung des Binomialkoeffizienten

Schon aus der Definition der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ als die Anzahl der k Teilmengen einer n Menge weiß man, dass die Folge $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, , \binom{n}{n}$ der Binomialkoeffizienten.

sich aufsummiert zu $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
symmetrisch ist: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Aus der Funktionalgleichung $\binom{n}{k} = \frac{(n-k+1)}{k}\binom{n}{k-1}$ leitet man leicht ab, dass für jedes n die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ eine Folge bilden, die symmetrisch und unimodal ist: sie steigt bis zu Mitte an, so dass die mittleren Binomialkoeffizienten die größten in der Folge sind:

$1 = \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n} = 1$

Hier bezeichnen $\lfloor x \rfloor bzw. \lceil x \rceil$ die Zahl x, abgerundet bzw aufgerundet bis zur nächsten ganzen Zahl. Mit Hilfe der oben angegebenen Formeln fr die Asymptotik der Fakultten kann man sehr genaue Abschtzungen fr die Größe der Binomialkoeffizienten ableiten. In meiner Seminararbeit brauche ich jedoch nur einen sehr schwache und einfache Abschätzung, wie die Folgende:

$\binom{n}{k} < 2^n$, für alle $k \leq n$
und
$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \frac{2}{n}$, für alle $n \geq 2$ mit der Gleichheit nur für n = 2.
Insbesondere erhält man
$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$ für $n \geq 1$

Der mittlere Binomialkoeffizient $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ist nämlich der größte Eintrag in der Folge der n Zahlen $\binom{n}{0} + \binom{n}{n}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}$, deren Summe 2^n und deren Mittelwert damit $\frac{2^n}{n}$ ist. Schließlich hält man die obere Schranke für die Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \frac{k}{2^(k-1)}$
fest, was eine halbwegs vernünftige Abschätzung für die kleineren Binomialkoeffizienten am Anfang der Folge ist, für die n im Vergleich zu k groß ist. [vgl. 5; S. 12]

4 Das Bertrandsche Postulat

Bereits im Jahre 1845 postulierte Joseph Bertrand, dass zwischen n und $2n$ immer (mindestens) eine Primzahl liegen müsse, also

Das Bertrandsche Postulat
Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Primzahl p mit $p < n \leq 2n$

Chebyschev said it, and I will say it again: there is always a prime between n and 2n.

Paul Erdös

Tschebyschev bewies das Bertrandsche Postulat im Jahre 1850, allerdings auf ziemlich komplizierte Art und Weise. Der folgende, deutlich einfachere Beweis stammt von Paul Erdös aus dem Jahre 1932, als Erdös 19 Jahre alt war. Erdös Beweis basiert auf einer cleveren Abschätzung geschickt gewählter Binomialkoefzienten. Es werden die Größen des Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ genau so abgeschätzt, dass gezeigt werden kann, dass der Binomialkoeffizient zu klein ausfallen würde, wenn er keinen Primfaktoren im Bereich $n < p \leq 2n$ hätte. Der Beweis setzt sich aus fünf Unterabschnitten zusammen und wurde aus [5] entnommen.

4.1 Schritt 1

Zunächst wird das Bertrandsche Postulat für $n < 4000$ bewiesen. Dafür müssen nicht alle 4000 Fälle überprüft werden. Es reicht zu überprüfen, dass

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001$$

eine Folge von Primzahlen ist, in der jede Primzahl kleiner ist als zweimal die vorhergehende. Also enthält jedes Intervall $\{y : n < y \leq 2n\}$, mit $n \leq 4000$, eine dieser vierzehn Primzahlen.

4.2 Schritt 2

Im zweiten Schritt soll folgende Ungleichung gezeigt werden

$$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1} \text{ für alle } x \geq 2 \tag{1}$$

Der Beweis wird als Induktion über alle Primzahlen $p \leq x$ geführt. Zunächst gilt für die größte Primzahl $q \leq x$

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} \text{ und } 4^{q-1} \leq 4^{x-1}$$

Damit reicht es, (1) für den Fall zu zeigen, dass $x = q$ eine Primzahl ist.
Für q =*2* erhält man "$2 \leq 4$". Nun geht man weiter zu den ungeraden Primzahlen q = 2m + 1. Dabei darf mit einem Induktionschluss annehmen, dass die Aussage schon für alle ganzen Zahlen {2, 3, ..., 2m} bewiesen ist. Also kann für q = 2m + 1 das Produkt zerlegt und berechnet werden:

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} \leq 4^m \binom{2m+1}{m} \leq 4^m 2^{2m} = 4^{2m}.$$

Alle Komponenten dieses Ëinzeilersßind leicht einzusehen. Somit gilt

$$\prod_{p \leq m+1} p \leq 4^m$$

nach Induktionsvoraussetzung. Die Ungleichung

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$$

folgt aus er Beobachtung, dass $\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$ eine ganze Zahl ist, wobei die Primzahlen, die auf der linken Seite auftauchen, alle den Zähler [2m+1]! teilen, aber nicht den Nenner *m!(m+1)*!.
Schließlich gilt

$$\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}$$

weil

$$\binom{2m+1}{m} \text{ und } \binom{2m+1}{m+1}$$

zwei gleiche(!) Summanden sind, die in der Summe

$$\sum_{k=0} 2m+1\binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}$$

enthalten sind.

4.3 Schritt 3

Nach dem Satz von Legendre weiß man nun, dass $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ den Primfaktor p genau

$$\sum_{k\geq 1}(\lfloor\frac{2n}{p^k}\rfloor - 2\lfloor\frac{n}{p^k}\rfloor)$$

Mal enhält. Dabei ist jeder Summand höchstens 1, weil der Summand

$$\lfloor\frac{2n}{p^k}\rfloor - 2\lfloor\frac{n}{p^k}\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2(\frac{n}{p^k} - 1) = 2$$

erfüllt und eine ganze Zahl ist. Die Summanden verschwinden sogar, wenn $p^k > 2n$ ist. Damit enthält $\binom{2n}{n}$ den Faktor p

$$\sum_{k\geq 1}(\lfloor\frac{2n}{p^k}\rfloor - 2\lfloor\frac{n}{p^k})\rfloor \leq max\{r : p^r \leq 2n\}$$

Mal. Also kann die größte Potenz von p, die $\binom{2n}{n}$ teilt, nicht größer als $2n$ sein.
Insbesondere sind Primzahlen p, die größer als $\sqrt{2n}$ sind, höchstens einmal in $\binom{2n}{n}$ enthalten.
Schließlich - und laut Edös ist dies der Knackpunkt seines Beweises - teilen Primzahlen p im Bereich $\frac{2}{3}n < p \leq n$ den Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ nicht!
Für $3p > 2n$ (und $n \geq 3$, und damit $p \geq 3$) sind nämlich p und $2p$ die einzigen Vielfachen von p, die als Faktoren im Zähler von $\frac{(2n)!}{n!n!}$ auftauchen, während zwei Faktoren im Nenner stehen.

4.4 Schritt 4

Nun kann $\binom{2n}{n}$ abgeschätzt werden.
Für $n \geq 3$ erhält man mit der oben angeführten Abschätzung des Binomialkoeffizienten für die untere Schranke

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p\leq\sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p,$$

und da es nicht mehr als $\sqrt{2n}$ Primzahlen $p \leq \sqrt{2n}$ gibt, gilt

$$4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p \text{ für } n \geq 3 \tag{2}$$

4.4.1 Beipiele

Beispiele wie

$$\binom{26}{13} = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$$
$$\binom{28}{16} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$$
$$\binom{10}{15} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$$

zeigen, dass ßehr kleine"Primfaktoren $p < \sqrt{2n}$ in höherer Potenz in $\binom{2n}{n}$ auftauchen können. "Kleine"Primzahlen mit $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n$ tauchen höchstens einmal auf, während Faktoren in dem Intervall $\frac{2}{3}n < p \leq n$ überhaupt nicht auftauchen.

4.5 Schritt 5

Nun nimmt man an, dass es keine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$ gibt, sodass das zweite Produkt in (2) 1 ist. Durch Einsetzen von (1) in (2) erhält man

$$4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n},$$

und

$$4^{\frac{1}{3}n} \leq (2n)^{1+sqrt2n} \tag{3}$$

was für große n nicht erfüllt werden kann und daher nicht stimmt. Das ist so drastisch falsch, dass man es für $n \geq 4000$ sogar ganz ohne Taschenrechner sehen kann: Wenn man folgende Ungleichung verwendet, nämlich $a + 1 < 2^a$ (welche für alle $a \geq 2$ nach Induktion gilt, so erhält man

$$2n = (\sqrt[6]{2n})^6 < (\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor)^6 < 2^{6*\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor} \leq 2^{6*\sqrt[6]{2n}} \tag{4}$$

und damit für $n \geq 50$, dass $18 < 2\sqrt{2n}$ aus (3) und (4)

$$2^{2n} \leq (2n)^{3*[1+\sqrt{2n})} < 2^{\sqrt[6]{2n}*(18+18\sqrt{2n})} < 2^{20*\sqrt[6]{2n}\sqrt{2n}} = 2^{20*(2n)^{\frac{2}{3}}}.$$

Dies liefert $(2n)^{\frac{1}{3}} < 20$ und damit $n < 4000$.

5 Wie sind die Primzahlen verteilt?

Der wahrscheinlich älterste Beweis, jener für die Unendlichkeit der Primzahlen von Euklid und jene fundamentalen Beweise dieses Satzes von den berühmten Mathematikern Christian Goldbach, Perott, Auric, Metrod, Washington und Furstenberg sind nicht konstruktiv. Sie liefern alle keine Aussage darüber, wie man die n-te Primzahl bestimmen kann. Zudem geben die Beweise auch keinen Hinweis darauf, wie viele Primzahlen es bis zu einer vorgegebenen Zahl N gibt. Umgekehrt ist noch keine vernünftige Formel oder Funktion bekannt, die die Primzahlen repräsentieret.
Es ist jedoch möglich, die Anzahl der Primzahlen kleiner als N mit einer recht hohen Genauigkeit vorauszusagen. Eng mit diesem Problem verbunden ist der Versuch die *Primzahlfunktion* auf vernünftige Weise auszudrücken, welche folgendes besagt (vgl. [6], S.138):

"Für jede reelle Zahl $x > 0$ bezeichne $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen p mit $p \leq x$."
(Ribenboim, 2011, S.138)

Die grundlegende Idee beim Studium von $\pi(x)$, im Bezug auf die Primzahlfunktion, ist der Vergleich mit klassischen, einfach berechenbaren Funktionen, deren Werte so nah wie möglich bei $\pi(x)$ liegen sollten. Dies ist natürlich nicht einfach und schon viele Mathematiker haben sich diesem Problem in den letzten Jahrhunderten angekommen.
Aus den Abschätzungen, die im Beweis des Bertrandschen Postulats von Paul Erdös getroffen wurden, kann man geschickt aus (2) ableiten, dass $\prod_{n<p\leq 2n} p \geq 2^{\frac{1}{30}n}$ für $n \geq 4000$ gilt und es somit $\log_{2n}(2^{\frac{1}{30}n}) = \frac{1}{30} * \frac{n}{\log_2 n+1}$ Primzahlen im Bereich n und $2n$ gibt. Diese Abschätzung ist im Grunde eine sehr gute. Die "wahreSZahl der Primzahlen in diesem Bereich kann aus dem "Primzahlsatz"gefolgert werden und liegt in diesem Bereich bei ungefährt $\frac{n}{\log n}$.
Der Primzahlsatz besagt (vgl [5], S. 10), dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{p\leq n: pPrimzahl\}}{\frac{n}{logn}}$$

existiert, und gleich 1 ist.
Der Bewies des Primzahlsatzes wurde zum "meistgesuchten"Beweis erkoren. Es wurde sogar behauptet, dass der, der ihn finde, unsterblich werden würde. Im Jahr 1896 gelang es den Mathematikern Jacques Salomon Hadamard und Charles-Jean de La Vallee Poussin einen Beweis zu formulieren. Bernhard Riemann stellte viele der Werkzeuge für den Beweis dieses fundamentalen Satzes zur Verfügung. Ein Beispiel hierfür wäre die *Riemannsche Zetafunktion* (vgl [6], S. 56) $\zeta(s)$ definiert für reelle $s > 1$ durch

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

Lange Zeit wurde angenommen, dass sich die Verwendung analytischer Methoden sich beim Beweis des Primzahlsatzes nicht vermeiden ließe. Umso erstaunlicher war der Erfolg von Atle Selberg, der den Beweis des Primzahlsatzes nur mittels elementarer Abschätzungen von arithmetischen Funktionen führen konnten. Zur gleichen Zeit fand Paul Erdös, ebenfalls unter der Verwendung einer Variante von Sellbergs Aschätzungen und mit Hilfe einer anderen elementaren Methode seinen Beweis des Primzahlsatzes. Im Jahre 1970 versuchten sich auch die Mathematiker Diamond und Steinig an einer neuen Beweisführung, die jedoch einen Fehlerterm enthält. Das letzte Wort über den Primzahlsatz ist wohl noch nicht gesprochen. So würde etwa ein Beweis der Riemannschen Vermutung, die besagt, dass alle nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion den Realteil $\frac{1}{2}$ besitzen, eines der wichtigsten ungelösten Probleme der Mathematik, auch eine substantielle Verbesserung der Abschätzung im Primzahlsatz liefern. Jedoch auch das Bertrandsche Postulat könnte noch ordentlich verbessert werden. Im Jahre 1882 behauptete Opperman, dass (vgl. [6], S. 190) $\pi n^2 + n > \pi n^2 > \pi n^2 - n$ für $n > 1$ Es ist leicht zu sehen, dass sich aus der Vermutung die Aussage ableiten lässt, dass es zwischen den Quadratzahlen zweier aufeinander folgender Zahlen mindestens zwei Primzahlen gibt. Seine Frage, ob es für jedes $n \geq 2$ mindestens eine Primzahl zwischen $(n-1)n$ und n^2, und mindestens eine zwischen n^2 und $n(n+1)$ gibt, konnte noch immer nicht geklärt werden.

6 Literatur

[1] URL: *http://www.britannica.com/EBchecked/topic/62864/Joseph-Bertrand* (besucht am 29.11.2013)

[2] URL: *http://de.wikipedia.org/wiki/Pafnuti-Lwowitsch-Tschebyschoe* (besucht am 28.11.2013)

[3] *URL: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Erdos.html* (besucht am 27.11.2013)

[4] Walter Strampp. *Hoehere Mathematik 1*. Vieweg + Teuber, 2010

[5] Martin Aigner und Günter M. Ziegler. *Das Buch der Beweise*. Springer Berlin Heidelberg, 2010

[6] Paulo Ribenboim. *Die Welt der Primzahlen, Geheimnisse und Rekorde*. Springer Berlin Heidelberg, 2011