Seminararbeit zu

„Seminar aus Reiner Mathematik“

LV Nr. 621.224

Mengen, Funktionen & die Kontinuumshypothese

Markus Prenner und Elke Schlager

Wintersemester 2013/14

Inhaltsverzeichnis

VORWORT

Das Thema dieser Seminararbeit lautet *„Mengen, Funktionen und die Kontinuumshypothese“* und beschäftigt sich vor allem mit unendlichen Mengen und deren *Mächtigkeit*. Bei unendlichen Mengen wird die *Mengenlehre* sehr schnell sehr viel abstrakter als sie es bei endlichen Mengen ist. Deshalb müssen wir uns kapitelweise vorarbeiten und wichtige Definitionen und Sätze der Mengenlehre kennenlernen, um mathematisch sinnvoll mit unendlichen Mengen arbeiten zu können. Da die Theorie sehr komplex und umfassend ist, ist es leider nicht möglich alle verwendeten Sätze zu beweisen. Wir haben deshalb Beweise rausgegriffen, die uns besonders interessant und lehrreich erscheinen und diese sehr sorgfältig ausformuliert, um das Verständis zu erleichtern.

Zum Aufbau der Seminararbeit:

In der Einleitung sind viele mathematische Sachverhalte zu finden, die Ihnen wahrscheinlich schon mehr oder weniger bekannt sind. Da wir aber teils sogar öfters auf die Definitionen und Sätze der Einleitung zurückgreifen werden, ist es wichtig zu wissen, mit welcher Definition bzw. mit welcher Version eines mathematischen Satzes wir genau arbeiten. Außerdem ist Einiges oft nur vom Hörensagen bekannt, wie etwa die *Zermelo-Fraenkel-Axiome mit Auswahlaxiom* (kurz: ZFC), welche man aber zumindest einmal genau durchgelesen und verstanden haben sollte, wenn man sich mit der Mengenlehre beschäftigt.

Das zweite Kapitel, Die Ordinalzahlen, dringt schon tiefer in die Materie der unendlichen Mengen ein. Wir werden sehen wie eine Ordinalzahl genau definiert ist und welche Eigenschaften Ordinalzahlen, bzw. die Gesamtheit aller Ordinalzahlen, besitzen. Dabei ist es für den Leser ratsam die Beweise genau durchzuarbeiten, um ein Gefühl für Ordinalzahlen zu bekommen. Zu diesem Zweck sind die Beweise besonders ausführlich und mit möglichst vielen Erklärungen gehalten.

Die Theorie der Ordinalzahlen führt uns weiter zum Kapitel der Kardinalzahlen. Sie sind spezielle Ordinalzahlen und beschreiben die *Mächtigkeit* von Mengen. Um uns den Sätzen und Beweisen der Mengenlehre stellen zu können, benötigen wir unter anderem eine Arithmetik für die Kardinalzahlen. Diese werden wir uns definieren und teils beweisen. Weiters werden wir Mengen vergleichen, indem wir ihre Mächtigkeit mittels injektiver und surjektiver Funktionen untersuchen.

Die Kontinuumshypothese bildet unser letztes Kapitel. Darin ist die von Georg Cantor aufgestellte Kontinuumshypothese formuliert, welche weder bewiesen, noch widerlegt werden kann. Weiters ist eine interessante Fragestellung aus der Funktionentheorie angeführt, deren Antwort überraschenderweise von der Richtigkeit der Kontiuumshypothese abhängt.

Graz, Oktober 2013 — Markus Prenner und Elke Schlager

1 EINLEITUNG

In den nachfolgenden Kapiteln werden wir einige Definitionen und Sätze aus der Mengenlehre benötigen. Der Übersichtlichkeit wegen sind hier einige wichtige Grundlagen der Mengenlehre angeführt, auf die in den weiteren Kapiteln immer wieder zurückgegriffen wird und welche sich keinem spezifischen Kapitel zuordnen lassen.

1.1 ZERMELO-FRAENKEL-AXIOME MIT AUSWAHLAXIOM

Die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ist eine weit verbreitete axiomatische Mengenlehre, die nach Ernst Zermelo und Abraham Adolf Fraenkel benannt ist. Sie ist heute Grundlage fast aller Zweige der Mathematik, da sich so gut wie alle bekannten mathematischen Aussagen so formulieren lassen, dass sich beweisbare Aussagen aus ZFC ableiten lassen. Diese Axiome wurden eingeführt, da mit der bis dahin praktizierten *naiven Mengenlehre* Widersprüche entstanden, wie beispielsweise die Russelsche Antinomie oder das Burali-Forti-Paradoxon, welches wir später noch kennenlernen werden.
Im Laufe unseres bisherigen Studiums wurden die Axiome bis dato immer stillschweigend als selbstverständlich angenommen. Wir halten es jedoch für wichtig, zumindest einmal einen Blick auf diese Axiome zu werfen, da ihr Existenz, wie wir später noch sehen werden, ausschlaggebend für die Antwort auf die Frage der Kontinuumshypothese ist. Denn sobald man mit *echten Klassen* (der Begriff wird weiter unten noch definiert) arbeitet, lässt sich die zu beweisende Aussage nicht mehr aus den ZFC-Axiomen ableiten.

1. **Extensionalitätsaxiom:** Die Menge A ist genau dann gleich der Menge B, wenn sie dieselben Elemente enthält. $\forall A, B : (A = B \Leftrightarrow \forall C : (C \in A \Leftrightarrow C \in B))$

2. **Paarmengenaxiom:** Für alle A und B gibt es eine Menge C, die genau A und B als Elemente hat. $\forall A, B : \exists C : \forall D : (D \in C \Leftrightarrow (D = A \vee D = B))$

3. **Vereinigungsaxiom:** Für jede Menge A gibt es eine Menge B, die genau die Elemente der Elemente von A als Elemente enthält. $\forall A : \exists B : \forall C : (C \in B \Leftrightarrow \exists D : (D \in A \wedge C \in D))$

4. **Unendlichkeitsaxiom:** Es gibt eine Menge A, die die leere Menge und mit jedem Element x auch die Menge $x \cup \{x\}$ enthält. $\exists A : (\exists X \in A : \forall Y : \neg(Y \in X) \wedge \forall X : (X \in A \Rightarrow X \cup \{X\} \in A))$

5. **Potenzmengenaxiom:** Für jede Menge A gibt es eine Menge $\mathcal{P}$, deren Elemente genau die Teilmengen von A sind. $\forall A : \exists \mathcal{P} : \forall B : (B \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \forall C : (C \in B \Rightarrow C \in A))$

6. **Fundierungsaxiom:** Jede nichtleere Menge A enthält ein Element B, so dass A und B disjunkt sind. $\forall A : (A \neq \emptyset \Rightarrow \exists B : (B \in A \wedge \neg\exists C : (C \in A \wedge C \in B)))$

7. **Aussonderungsaxiom:** Hier handelt es sich um ein Axiomenschema mit je einem Axiom zu jedem einstelligen Prädikat P: Zu jeder Menge A existiert eine Teilmenge B von A, die genau die Elemente von C von A enthält, für die P(C) wahr ist. Für jedes einstellige Prädikat P gilt: $\forall A : \exists B : \forall C : (C \in B \Leftrightarrow C \in A \wedge P(C))$

8. **Ersetzungsaxiom:** Ist A eine Menge und wird jedes Element von A eindeutig durch eine beliebige Menge ersetzt, so geht A in eine Menge über. Die Ersetzung wird präzisiert durch zweistellige Prädikate mit ähnlichen Eigenschaften wie eine Funktion, und zwar als Axiomenschema für jedes zweistellige Prädikat F: $\forall X, Y, Z : (F(X,Y) \wedge F(X,Z) \Rightarrow Y = Z) \Rightarrow \forall A : \exists B : \forall C : (C \in B \Leftrightarrow \exists D : (D \in A \wedge F(D,C)))$

9. **Auswahlaxiom:** Ist A eine Menge nichtleerer Mengen, dann gibt es eine Funktion f von A in seine Vereinigung, die jedem Element B von A ein Element von B zuordnet (also ein Element von B „auswählt").

1.2 WICHTIGE DEFINITIONEN UND SÄTZE

Definition 1 (Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit)
Eine Menge A heißt genau dann *abzählbar*, wenn eine Bijektion von A nach $\mathbb{N}$ existiert.
Eine Menge B heißt *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist.

Definition 2 (Wohlgeordnete Menge)
Eine *Wohlordnung* einer Menge S ist eine totale Ordnung, bei der jede nichtleere Teilmenge von S ein kleinstes Element bezüglich dieser Ordnung hat. Die Menge S zusammen mit der Wohlordnung heißt eine wohlgeordnete Menge.

Beispiel 1

Wir geben eine Wohlordnung auf $\mathbb{N}$ an. Die natürlichen Zahlen werden so geordnet, dass jede gerade Zahl *größer* ist als jede ungerade Zahl. Untereinander sollen die geraden und die ungeraden Zahlen wie üblich geordnet sein, also in der folgenden Art:

$$1 < 3 < 5 < \ldots < 2 < 4 < 6 \ldots \tag{1}$$

Offenbar ist dies eine wohlgeordnete Menge. Jedoch ist auch die *übliche* Ordnung auf die Menge der natürlichen Zahlen eine Wohlordnung:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots \tag{2}$$

Die *Wohlordnung* einer Menge ist somit nicht immer eindeutig. Darauf werden wir später bei der Definition der Kardinalzahlen nochmals zurückgreifen.

Definition 3 (Ordnungsisomorphismus)
Seien $(W, <_W)$, $(X, <_X)$ wohlgeordnete Mengen. Eine bijektive Abbildung $f : W \to X$ heißt *Ordnungsisomorphismus*, falls gilt:

$$\forall w, z \in W : w <_W z \Rightarrow f(w) <_X f(z).$$

Definition 4 (Gleichmächtigkeit)
Zwei Mengen M und N heißen genau dann *gleichmächtig* zueinander, falls eine bijektive Abbildung von M auf N existiert.

1.3 DIE IDEE DER KARDINALZAHLEN

Kardinalzahlen beschreiben die „*Größe*“ einer Menge. Bei endlichen Mengen gibt die Kardinalzahl an, wie viele Elemente in der Menge sind; die Menge $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ besitzt somit die Kardinalität n.
Für unendliche Mengen ist die Definition der Kardinalität weniger intuitiv. Vor allem die Vorstellung, dass unendliche Mengen *verschieden groß* sein können, ist zu Beginn schwer zu begreifen. Wie man aber sehr schnell zeigen kann, ist etwa die Menge der natürlichen Zahlen (eine abzählbare Menge) nicht *gleich groß* wie die Menge der reellen Zahlen (eine überabzählbare Menge), obwohl beide Mengen unendlich sind.
Wir werden also für jede Menge, egal ob endlich oder unendlich, eine dazugehörige Kardinalzahl definieren, wobei zwei Mengen genau dann gleiche Kardinalität haben sollen, wenn die Mengen bijektiv aufeinander abgebildet werden können.
Dies führt zum Begriff der Gleichmächtigkeit und zum Vergleich der Kardinalität von Mengen. Vor allem für unendlich große Mengen wird dieser Vergleich dann interessant und liefert dann unter anderem die *Kontinuumshypothese*.

Dies sollte die Idee und den Sinn der Kardinalzahlen nun ausreichend verdeutlicht haben. Um weiter in die Materie eintauchen zu können, müssen wir uns aber noch die Theorie der *Ordinalzahlen* erarbeiten, um anschließend die *Kardinalzahlen* sauber definieren zu können.

1.4 KLASSEN

Wir sind es gewohnt in der Mathematik meistens mit *Mengen*, beziehungsweise mit deren Elementen, zu arbeiten. Allerdings gibt es auch mathematische Objekte, welche man im ZFC-System nicht als Menge beschreiben kann, da dies zu Widersprüchen führen würde (siehe Beispiel 2). Deshalb greift man als Verallgemeinerung der Mengen zu den sogenannten *Klassen*:

Definition 5 (Klasse)
Ist $A(x)$ eine beliebige logisch korrekt gebildete Aussage mit der Variablen x, so wird die Gesamtheit aller Objekte x, die die Aussage $A(x)$ erfüllen, als eine *Klasse* bezeichnet und als $\{x \mid A(x)\}$ notiert.

Klassen unterliegen keiner Einschränkung in ihrer Bildung und Definition. Jedoch muss man bei der Verwendung Acht geben, um sich nicht in die Widersprüche der naiven Mengenlehre zu verstricken.

Üblicherweise werden *Klassen*, die keine Mengen sind, als *echte Klassen* bezeichnet.

Beispiel 2
Als Beispiel für eine echte *Klasse* dient die sogenannte *Allklasse*: $\{x|x = x\}$. Diese Klasse kann keine Menge sein, da sie sonst die Menge aller Mengen sein müsste, was eine widersprüchliche Eigenschaft ist.

Ebenso bilden die im nächsten Kapitel eingeführten *Ordinalzahlen* eine *echte Klasse*. Die hier verwendete Theorie werden wir uns erst im Laufe der nächsten Kapitel erarbeiten. Trotzdem wollen wir hier als Vorgriff den Beweis kurz skizzieren, da er leicht nachzuvollziehen ist.
Den Beweis zu der Behauptung liefert das BURALI-FORTI-PARADOXON: Angenommen es gäbe die Menge aller *Ordinalzahlen*. Diese Menge entspräche dann selbst wieder einer *Ordinalzahl* Ω, welche eine größere *Nachfolger-Ordinalzahl* $\Omega + 1$ besäße. Diese wäre kleiner oder gleich Ω, woraus die unmöglich zu erfüllende Ungleichung $\Omega < \Omega + 1 \leq \Omega$ folgen würde.

2 ORDINALZAHLEN

Jede *Ordinalzahl* ist eine spezielle wohlgeordnete Menge. Sie geben die Position eines Elements in einer wohlgeordneten Menge an. Gleichzeitig gibt es zu jeder wohlgeordneten Menge eine eindeutig bestimmte *Ordinalzahl*. Um dies zu verstehen betrachten wir die auf die Klasse der Ordinalzahlen (notiert als **Ord**) bestimmte *Ordnungsrelation:* Die Idee dahinter ist, Ordinalzahlen so zu definieren, dass Folgendes gilt:

$$(\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta) \quad \text{und} \quad \alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}.$$

2.1 DEFINITION DER ORDINALZAHLEN

Um *Ordinalzahlen* zu definieren benötigen wir den Begriff der *Transitivität*:

Definition 6 (Transitivität)
Eine Menge X ist *transitiv*, falls $\forall x \in X$ gilt: $x \subset X$.

Definition 7 (Ordinalzahl)
Eine *Ordinalzahl* ist eine *transitive* Menge, die bezüglich der Elementrelation wohlgeordnet ist.

Bemerkung: Die natürlichen Zahlen kann man als *Ordinalzahlen* auffassen. Dies kann man folgendermaßen veranschaulichen:

$$\begin{aligned}
0 &:= \emptyset \\
1 &:= \{0\} = \{\emptyset\} \\
2 &:= \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &:= \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
4 &:= \{0,1,2,3\} \\
&\vdots \\
n+1 &:= n \cup \{n\} = \{0,1,\ldots,n\}
\end{aligned}$$

Hier kann man sehen, dass die Mengen 0, 1, 2, usw. jeweils durch die Elementrelation $(n \in n+1)$ wohlgeordnet sind. So hat beispielsweise die Zahl 4 die Elemente 0, 1, 2, 3, die als $0 < 1 < 2 < 3$ geordnet werden.
Auch die Transitivität ist durch diese induktive Konstruktion erfüllt, da die nächstgrößere Menge immer so gebildet wird, dass die vorige Menge immer als *Teilmenge* und als *Element* vertreten ist.

2.2 EIGENSCHAFTEN DER ORDINALZAHLEN

Bei der Definition der *Kardinalzahlen* und beim Umgang mit ihnen ist es essentiell, Ordinalzahlen miteinander vergleichen und ein Minimum einer Teilklasse von **Ord** wählen zu können. Dazu formulieren und beweisen wir in den folgenden zwei Sätzen einige Eigenschaften der Ordinalzahlen. In Satz 1 werden wir unter anderem sehen, dass jede Ordinalzahl eine Menge aus Ordinalzahlen ist. In Satz 2 wird zuerst die Totalordnung der Klasse der Ordinalzahlen gezeigt, anschließend, dass jede Teilklasse ein Minimum besitzt. Weiters werden wir sehen, dass es immer eine nächstgrößere Ordinalzahl gibt und wie diese definiert ist.

Satz 1.

i) $0 = \emptyset$ *ist ein Ordinalzahl.*

ii) Falls α *eine Ordinalzahl mit* $\beta \in \alpha$*, dann ist auch* β *eine Ordinalzahl.*

iii) Falls α *und* β *Ordinalzahlen und* $\alpha \subsetneq \beta$*, dann gilt:* $\alpha \in \beta$*.*

Beweis

ad i) trivial.

ad ii) Sei $\beta \in \alpha$. Aus der Transitivität folgt $\beta \subset \alpha$. Da $\alpha \in \mathbf{Ord}$, ist α wohlgeordnet und β als Teilmenge von α ist somit insbesondere wohlgeordnet.
Sei nun $\xi \in \beta$; zu zeigen ist: $\xi \subset \beta$. Sei also $\eta \in \xi$, dann gilt $\eta, \xi, \beta \in \alpha$ und $\eta \in \xi \in \beta$. Da α totalgeordnet ist, folgt $\eta \in \beta$.
β ist also eine Ordinalzahl.

ad iii) Sei $\alpha \subsetneq \beta$. Setze $\gamma = \min(\beta \backslash \alpha)$. Behauptung: $\alpha = \{\xi \in \beta \,|\, \xi < \gamma\} = \gamma$. $\xi < \gamma \Rightarrow \xi \in \alpha$, da γ das kleinste Element von $\beta \backslash \alpha$.
Angenommen $\xi \in \alpha \wedge \xi \notin \gamma$. Dann folgt $\gamma \leq \xi < \alpha$, also $\gamma \in \alpha$.
Dies ist ein Widerspruch zur Definition von γ.

$\square$

Satz 2.

i) Seien $\alpha, \beta \in$ ***Ord****. Dann gilt entweder* $\alpha \subset \beta$ *oder* $\beta \subset \alpha$*.*

ii) Falls C *eine nichtleere Klasse von Ordinalzahlen ist, dann gilt* $\bigcap C = \min C$*.*
(Genauer: $\bigcap_{\alpha \in C} \alpha = \min_{\alpha \in C} \alpha$*)*

iii) Für eine Ordinalzahl α *gilt:* $\alpha \cup \{\alpha\}$ *ist die kleinste Ordinalzahl größer als* α*.*
(D.h. $\alpha \cup \{\alpha\} = \min\{\beta \,|\, \beta > \alpha\}$*)*

Beweis

ad i) Offenbar ist $\gamma := \alpha \cap \beta \in \mathbf{Ord}$. Falls $\gamma \neq \alpha \wedge \gamma \neq \beta$, so folgt $\gamma \in \alpha \wedge \gamma \in \beta$ also $\gamma \in \gamma$, ein Widerspruch.

ad ii) Sei $\gamma := \bigcap C$. Wir zeigen zuerst: $\gamma \in \mathbf{Ord}$. Sei $\xi \in \eta \in \gamma$, dann gilt: $\forall c \in C : \xi \in \eta \in c$. Für alle $c \in C$ gilt, dass $c \in \mathbf{Ord}$ ist. Daraus folgt: $\forall c \in C : \xi \in c$ und somit $\xi \in \bigcap C$. Somit ist γ transitiv.
Für ein $c \in C$ gilt $\bigcap C \subset c$. Somit folgt aus der Wohlordnung von c, dass auch γ wohlgeordnet ist. Aus $\forall c \in C : \bigcap C \subset c$ lässt sich schließen, dass γ eine untere Schranke ist für alle $c \in C$. Wenn γ echt kleiner als alle $c \in C$ wäre, würde gelten: $\forall c \in C : \bigcap C \in c$, also $\bigcap C \in \bigcap C$. Widerspruch! Also ist γ das Minimum von C.

ad iii) Sei $\gamma := \alpha \cup \{\alpha\}$. Wir zeigen zuerst $\gamma \in \mathbf{Ord}$: Aus $\xi \in \gamma$ folgt $\xi \in \alpha \vee \xi = \alpha$. Da $\alpha \in \mathbf{Ord}$, folgt in beiden Fällen $\xi \subset \gamma$. Somit ist γ transitiv.
Wegen $\forall \xi \in \gamma : \xi \leq \alpha$ ist γ wohlgeordnet, also $\gamma \in \mathbf{Ord}$. Sei nun $\xi \in \mathbf{Ord}$ mit $\alpha < \xi$ .Dann gilt $\alpha \in \xi \wedge \alpha \subset \xi$, also $\alpha \cup \{\alpha\} \subset \xi$.
Damit gilt: $\forall \xi > \alpha : \alpha < \gamma \leq \xi$, was zu zeigen war. □

2.3 ÜBER GRENZ- UND NACHFOLGERZAHLEN

Man kann Ordinalzahlen in *Grenzzahlen* und *Nachfolgerzahlen* unterteilen. Die Nachfolgerzahl einer Ordinalzahl ξ ist die kleinste Ordinalzahl, die echt größer als ξ ist (siehe Satz 2.iii)). Die Nachfolgerzahl wird dann mit $\xi + 1$ bezeichnet. Analog ist ξ der sogenannte Vorgänger von $\xi + 1$.
Jedoch besitzt nicht jede Ordinalzahl einen Vorgänger. Diese Ordinalzahlen ohne Vorgänger nennt man Grenzzahlen. ξ ist genau dann eine Grenzzahl, wenn gilt $\xi = \sup(\xi)$, wobei das Supremum einer Ordinalzahl ξ mit der Vereinigung aller Ordinalzahlen echt kleiner als ξ übereinstimmt.
(Dazu zeigt man, dass die Vereinigung von Ordinalzahlen selbst wieder eine Ordinalzahl ist: Die Wohlordnung gilt, da die Vereinigung eine Teilklasse der Klasse aller Ordinalzahlen ist. Die Transitivität folgt aus der Transitivität der einzelnen Ordinalzahlen, über die vereinigt wird. Weiters zeigt man, dass die Vereinigung dann die Supremumseigenschaft erfüllt.)

Mit ω_0 wird die erste Grenzzahl bezeichnet, sie ist gleichmächtig zu jeder abzählbar unendlichen Menge.

2.4 WEITERE DEFINITIONEN

Der folgende Satz und die Definitionen über Ordinalzahlen werden im Kapitel der *Kardinalzahlen* für einige Beweise benötigt:

Satz 3. *Sei $(W, <)$ eine wohlgeordnete Menge. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Ordinalzahl, die isomorph zu $(W, <)$ ist. Wir bezeichnen diese Zahl als den Ordnungstyp der Menge W bezüglich der Relation < und schreiben: $O.t(W, <)$.*

Bemerkung: Dies bedeutet jede *wohlgeordnete* Menge besitzt eine *eindeutige* Ordinalzahl. Da sich jede Menge wohlordnen lässt, besitzt jede beliebige Menge eine Ordinalzahl; je nach definierter Wohlordnung kann die Menge auch zu verschiedenen Ordinalzahlen gleichmächtig sein (siehe Beispiel 3 unten). Wir werden in Satz 8 den umgekehrten Weg gehen: Jede Menge ist zu einer Ordinalzahl gleichmächtig. Da die Ordinalzahl eine eindeutige Wohlordnung besitzt, ist der Ordnungstyp der Menge nun jener der Ordinalzahl. Somit wurde der Menge aufgrund der Gleichmächtigkeit zu einer Ordinalzahl eine Wohlordnung zugeteilt, also lässt sie sich insbesondere wohlordnen.

Definition 8 (Segment)
Sei $(W, <)$ eine wohlgeordnete Menge. Sei weiters $x \in W$. Wir definieren das *Segment* von x wie folgt:

$$seg(x) := \{w \in W | w < x\} .$$

Definition 9 (Ordnungstyp O.t)
Seien α, β Ordinalzahlen. Sei $A := \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$. Wir definieren auf A eine Wohlordnung $<_A$ wie folgt:

$$(\xi, i) <_A (\eta, j) \Leftrightarrow (i < j) \vee ((i = j) \wedge (\xi < \eta)) .$$

Damit definieren wir nun $\alpha + \beta$ als den *Ordnungstyp* von A mit der Relation $<_A$:

$$\alpha + \beta := O.t(A, <_A) .$$

Definition 10 (Klasse aller Mengen)
Wir definieren V als die Klasse aller Mengen: $V = \{x | x = x\}$.

Definition 11 (Klassenfunktion)
Eine *Klassenfunktion* ist eine Klasse F von geordneten Paaren, mit der Eigenschaft: $(x, y), (x, z) \in F \Rightarrow y = z$.

Satz 4 (Rekursionssatz). *Sei $G : V \to V$ eine Klassenfunktion. Dann existiert eine eindeutige Klassenfunktion $F : \textbf{Ord} \to V$ mit $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$ für alle Ordinalzahlen α.*

Bemerkung: $F|_\alpha$ ist das Bild von F eingeschränkt auf die Ordinalzahl α. Somit ist $G(F|_\alpha)$ das Bild unter G von der Einschränkung $F|_\alpha$.

3 KARDINALZAHLEN

Nachdem wir nun einiges über die *Ordinalzahlen* erfahren haben, können wir nun *Kardinalzahlen* als spezielle *Ordinalzahlen* betrachten.

3.1 DEFINITION DER KARDINALZAHLEN

Um den Begriff der *Kardinalzahl* zu definieren, benötigen wir die Tatsache, dass jede *Menge* eine (nicht unbedingt eindeutige) zu sich gleichmächtige *Ordinalzahl* besitzt.

Satz 5 (Wohlordnungssatz)**.** *Sei X eine Menge. Dann existiert eine Ordinalzahl γ, so dass X gleichmächtig zu γ ist. Das heißt, X besitzt insbesondere eine Wohlordnung.*

Beweis

Wir zeigen: Es existieren eine Ordinalzahl γ und eine bijektive Abbildung $h : \gamma \to X$.
Sei g eine *Auswahlfunktion* für die Menge $S := \{A \subset X | A \neq \emptyset\}$. Sei $\theta \in V \backslash X$. Mittels transfiniter Rekursion definieren wir:

$$f(0) = g(X), \quad f(\alpha) = \begin{cases} g(X \backslash \{f(\xi) | \xi < \alpha\}) & \text{falls } X \backslash \{f(\xi) | \xi < \alpha\} \neq \emptyset \\ \theta & \text{sonst} \end{cases}$$

$f : \mathbf{Ord} \to X \cup \{\theta\}$ ist also eine Klassenfunktion. Wir wollen nun wissen, ob der Funktionswert θ wirklich für ein $\beta \in \mathbf{Ord}$ angenommen wird. Dazu nehmen wir an: $f : \mathbf{Ord} \to X$, also dass θ nie angenommen wird. f ist unter dieser Annahme injektiv, also existiert die Linksinverse $f^{-1} : f(\mathbf{Ord}) \to \mathbf{Ord}$. Aus $f(\mathbf{Ord}) \subset X$ würde folgen, dass $f(\mathbf{Ord})$ eine Menge ist. Nach dem Ersetzungsaxiom wäre dann aber $\mathbf{Ord} = (f^{-1})(f(\mathbf{Ord}))$ eine Menge. Ein Widerspruch! Daraus folgt, dass es eine Ordinalzahl β gibt mit $f(\beta) = \theta$. Sei γ die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Wir behaupten, dass $f|_\gamma : \gamma \to X$ eine Bijektion ist. Nach Konstruktion ist $f|_\gamma$ injektiv. Angenommen $f|_\gamma$ wäre nicht surjektiv. Dann gilt: $\{f(\alpha) | \alpha < \gamma\} \subsetneq$ X. Also folgt: $f(\gamma) \neq \theta$. Ein Widerspruch!
Für $h := f|_\gamma$ gilt also unsere Behauptung. □

Da sich nicht jede Menge auf nur eine einzige Art wohlordnen lässt, sondern oft auf vielerlei Weise, muss dieses oben konstruierte α nicht immer die einzige Ordinalzahl sein, die zu X gleichmächtig ist. Das heißt, es kann für eine Menge X eine ganze *Teilklasse* $\{\alpha \in \mathbf{Ord} \mid \alpha \text{ ist gleichmächtig zu X}\}$ von Ordinalzahlen geben. Wie wir schon wissen, sind Ordinalzahlen wohlgeordnet, das heißt, wir können insbesondere das Minimum jeder Teilklasse sinnvoll definieren. Dies rechtfertigt die Definition der *Kardinalzahlen:*

Definition 12 (Kardinalität)
Sei X ein Menge. Setze $|X| := \min\{\alpha \in \mathbf{Ord} \mid \alpha$ ist gleichmächtig zu X$\}$. Wir nennen $|X|$ die *Kardinalität* der Menge X.

Definition 13 (Kardinalzahl)
Eine Ordinalzahl κ heißt Kardinalzahl, falls gilt: $|\kappa| = \kappa$.

Bermerkung: Manchmal wird die Kardinalität über Äquivalenzklassen definiert. Dabei wird verwendet, dass *„die gleiche Mächtigkeit zu besitzen"* eine Äquivalenzrelation auf den Mengen definiert. Folglich ist die Kardinalzahl $|X|$ die Äquivalenzklasse der Menge X. Problematisch hierbei ist, dass mit dieser Äquivalenzklassen-Definition die Kardinalzahlen keine Mengen bilden, sondern *echte Klassen*.

> **Beispiel 3**
> Anhand der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ wollen wir die Definition 12 nochmals genauer erläutern, wobei wir uns auf die zwei definierten Ordnungen aus Beispiel 1 beziehen: Die *Ordinalzahl* der Ordnung (1) auf den natürlichen Zahlen ist isomorph zu $\omega_0 + \omega_0$, jene der Ordnung (2) jedoch zu ω_0. $\mathbb{N}$ lässt sich nicht so wohlordnen, dass sie ordnungsisomorph zu einer noch kleineren Ordinalzahl als ω_0 ist. Deshalb ist ω_0 auch zugleich die Kardinalzahl von $\mathbb{N}$, bezeichnet mit $\aleph_0$.

Bemerkung: Im Beispiel wurde verwendet, dass man Ordinalzahlen addieren kann. Die Arithmetik für die Ordinalzahlen hier zu definieren würde allerdings den Rahmen der Arbeit sprengen; wir werden uns nur der Arithmetik der Kardinalzahlen widmen, da wir diese für einige Beweise benötigen. Allerdings sei hier erwähnt, dass die Arithmetik, die wir kennen, sich von jener der Ordinalzahlen unterscheidet; auch die Arithmetik der Kardinalzahlen ist wiederum zu beiden verschieden.

Satz 6. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl (d.h $\kappa \geq \aleph_0$). Dann gilt: κ ist eine Grenzzahl.*

Beweis

Angenommen es existiert eine Ordinalzahl α mit $\alpha + 1 = \kappa$. Da κ unendlich ist, gilt: $\aleph_0 \subset \kappa$. Wir definieren eine Bijektion $f : \alpha \to \kappa$ wie folgt:

$$\begin{aligned} f(0) &= \alpha \\ f(m+1) &= m, \ \text{ für } m \in \aleph_0 \\ f(\xi) &= \xi, \ \text{ für } \xi \in \alpha \backslash \aleph_0 \end{aligned}$$

Offenbar ist f eine Bijektion, ein Widerspruch zur Definition einer Kardinalzahl. $\square$

Bemerkung: Um auszudrücken, dass die Kardinalzahl κ unendlich ist, wurde die Notation $\kappa \geq \aleph_0$ verwendet. Was dies bedeutet wollen wir hier näher erläutern:

3.2 DIE ALEPH-FUNKTION

Indem die *Aleph-Funktion* wie folgt rekursiv definiert wird, zählt sie die unendlichen Kardinalzahlen auf.

Definition 14 (Aleph-Funktion)
Die Aleph-Funktion ist eine Klassenfunktion und bildet von der Klasse der Ordinalzahlen in die Klasse der unendlichen Kardinalzahlen ab:

- $\aleph_0 := \omega_0 = |\mathbb{N}| =$ kleinste unendliche Ordinalzahl und somit die kleinste unendliche Kardinalzahl
- $\aleph_{\alpha+1} :=$ kleinste Kardinalzahl, die größer als $\aleph_\alpha$ ist
- $\aleph_\alpha := sup\{\aleph_\beta; \beta < \alpha\}$ für Grenzzahlen α

Die kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$ ist die Kardinalität der abzählbar unendlichen Mengen. Deshalb gilt $\aleph_0 := \omega_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = ...$

Bemerkung: Ordinalzahlen werden generell ω_i genannt, falls es eine Kardinalzahl $\aleph_i$ gibt mit $\omega_i = \aleph_i$. Die verschiedenen Bezeichnungen werden jedoch oftmals verwendet, um zu unterscheiden, ob man diese Zahl als Ordinalzahl oder als Kardinalzahl betrachtet. Dies ist oftmals wichtig um unterscheiden zu können, ob man die Arithmetik der Kardinal- oder Ordinalzahlen verwendet.

Die nächstgrößere Kardinalzahl wird mit $\aleph_1$ bezeichnet und es gilt analog zu $\aleph_0$: $\aleph_1 = \omega_1$.

Nachdem wir Kardinalzahlen im Allgemeinen und auch die unendlichen Kardinalzahlen im Besonderen kennengelernt haben, betrachten wir nun den Umgang mit Kardinalzahlen, also wie man mit ihnen korrekt rechnet.

3.3 ARITHMETIK DER KLASSE DER KARDINALZAHLEN

Die Arithmetik der Klasse der Kardinalzahlen unterscheidet sich erheblich von der Arithmetik auf reellen bzw. komplexen Zahlen, die wir kennen. Für einige Beweise in den folgenden Kapiteln benötigen wir einige Rechenoperationen für Kardinalzahlen, welche wir hier definieren.

Definition 15 (Rechenoperationen für Kardinalzahlen)
Seien λ, μ, κ Kardinalzahlen. Wir definieren folgende Operationen:

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &:= |\lambda \times \{0\} \cup \mu \times \{1\}| \\ \lambda \cdot \mu &:= |\lambda \times \mu| \\ \lambda^\mu &:= |\,^\mu\lambda|\,. \end{aligned}$$

Aus diesen Definitionen folgert man folgende Rechenregeln für Kardinalzahlen:

- $+, \cdot$ sind assoziativ und kommutativ.
- $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$
- $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$
- $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$
- $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)}$

Auch bezüglich der Ordnung verhalten sich die Kardinalzahlen sehr schön. Sei $\kappa_0 \leq \kappa_1$ und $\lambda_0 \leq \lambda_1$. Dann gilt:

- $\kappa_0 + \lambda_0 \leq \kappa_1 + \lambda_1$
- $\kappa_0 \cdot \lambda_0 \leq \kappa_1 \cdot \lambda_1$
- $\kappa_0^{\lambda_0} \leq \kappa_0^{\lambda_1}$

Um auf die Multiplikation unendlicher Kardinalzahlen näher eingehen zu können, benötigen wir zunächst folgenden Satz:

Satz 7. *Seien κ, λ Kardinalzahlen. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\kappa \leq \lambda$

(ii) Es existiert eine injektive Abbildung $f : \kappa \to \lambda$.

Beweis

$(i) \Rightarrow (ii)$: Da $\kappa \subset \lambda$, brauchen wir nur $f = id$ wählen.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei eine injektive Abbildung $f : \kappa \to \lambda$ gegeben. $f(\kappa)$ ist als Teilmenge von λ $\in$-wohlgeordnet. Sei $\gamma = O.t((f(\kappa), \in))$. Es gilt: $\kappa = |\kappa| = |f(\kappa)| \leq \gamma$. Offenbar gilt aber auch $\gamma \leq \lambda$, also gilt $\kappa \leq \lambda$.

□

Folgendes Korollar werden wir im Beweis von Satz 8 benötigen. Es folgt direkt aus Satz 7 und der Tatsache, dass jede Menge eine eindeutige Kardinalzahl besitzt.

Korollar: $A \subset B \Rightarrow |A| \leq |B|$.

Satz 8. *Sei κ eine Kardinalzahl mit $\kappa \geq \aleph_0$. Dann gilt $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.*

Beweis

Angenommen es wäre nicht so. Sei κ die *kleinste* Zahl $\kappa \geq \aleph_0$ mit $\kappa \cdot \kappa \neq \kappa$. D.h. für alle λ mit $\aleph_0 \leq \lambda < \kappa$ gilt $\lambda \cdot \lambda = \lambda$ und $\kappa \cdot \kappa > \kappa$.
Sei $P = \kappa \times \kappa$. Dann gilt laut den oben definierten Rechenregeln $|P| = \kappa \cdot \kappa > \kappa$. Für $\xi < \kappa$, sei

$$P_{\xi} = \{(\alpha, \beta) | \alpha + \beta = \xi\} .$$

Offenbar folgt aus $\xi \neq \zeta : P_\xi \cap P_\zeta = \emptyset$.
Wir behaupten:

$$P = \bigcup_{\xi<\kappa} P_\xi$$

Sei $(\alpha, \beta) \in P_\xi$ mit $\xi < \kappa$. Also gilt $\alpha + \beta = \xi < \kappa$, was $\alpha, \beta < \kappa$ zur Folge hat, also $(\alpha, \beta) \in P$. Umgekehrt sei $\alpha, \beta < \kappa$. Offenbar gilt $|\alpha|, |\beta| < \kappa$. Sei $\lambda = \max(|\alpha|, |\beta|)$. Für α und β endlich folgt trivialerweise $|\alpha + \beta| < \kappa$. Dies gilt auch für unendliche α und β:

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \leq \lambda + \lambda = 2 \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda < \kappa.$$

Also gilt $\alpha + \beta < \kappa$, also auch $(\alpha, \beta) \in P_\xi$ mit $\xi = \alpha + \beta < \kappa$. Wir definieren auf P_ξ eine lexikographische Wohlordnung $<_\xi$:

$$(\alpha, \beta) <_\xi (\alpha', \beta') \Leftrightarrow (\alpha < \alpha') \vee [(\alpha = \alpha') \wedge (\beta < \beta')]$$

Anschließend definieren wir auch auf P eine Wohlordnung $<_*$:

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) <_* (\alpha', \beta') \Leftrightarrow & [(\alpha, \beta) \in P_\xi \wedge ((\alpha', \beta') \in P_\eta) \wedge \xi < \eta] \vee \\ & [(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in P_\xi \wedge (\alpha, \beta) <_\xi (\alpha', \beta')]\end{aligned}$$

Setze $\theta := O.t(P, <_\xi)$. Da $|P| > \kappa$, gilt $\theta > \kappa$. Es folgt: $\exists (\alpha_0, \beta_0) \in P$: $O.t(seg((\alpha_0, \beta_0))) = \kappa$. Sei $\xi_0 < \kappa$ mit $(\alpha_0, \beta_0) \in P_{\xi_0}$. Für $(\alpha, \beta) \in seg((\alpha_0, \beta_0))$ gilt also $\alpha, \beta \leq \xi_0$. Folglich gilt $seg((\alpha_0, \beta_0)) \subset (\xi_0 + 1) \times (\xi_0 + 1)$, wobei $(\xi_0 + 1) < \kappa$, also: $|seg((\alpha_0, \beta_0))| \leq |\xi_0 + 1| \cdot |\xi_0 + 1| = |\xi_0 + 1| < \kappa$. Ein Widerspruch zu $O.t(seg((\alpha_0, \beta_0))) = \kappa$. □

Korollar: Für Kardinalzahlen $\kappa, \lambda \geq \aleph_0$ gilt: $\kappa \cdot \lambda = \kappa + \lambda = max\{\kappa, \lambda\}$.

Beweis

Sei o.B.d.A. $\kappa = \max\{\kappa, \lambda\} \Rightarrow$. Daraus folgt:

$$\kappa = 1 \cdot \kappa \leq \lambda \cdot \kappa \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa \text{ und}$$

$$\kappa = 0 + \kappa = \leq \lambda + \kappa \leq \kappa + \kappa = 2\kappa = \kappa\,.$$

□

3.4 EINIGE MENGENVERGLEICHE

Satz 9. *Seien X, Y nicht leere Mengen. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Es gibt eine Injektion $f : X \to Y$.

(ii) Es gibt eine Surjektion $g : Y \to X$.

Beweis

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $x_0 \in X$. Wir definieren $g : Y \to X$ wie folgt:

$$g(y) := \begin{cases} x & falls\, f(x) = y \\ x_0 & sonst \end{cases}$$

Offenbar ist g surjektiv.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $<_Y$ eine Wohlordnung von Y. Wir definieren $f : X \to Y$ wie folgt:

$$f(x) = \min\{y \in Y | g(y) = x\}$$

Aus $f(x) = f(z)$ folgt $x = g(f(x)) = g(f(z)) = z$. Also ist f injektiv.

□

Satz 10 (Cantor)**.** *Sei X eine Menge. Dann gilt* $|X| < |\mathcal{P}(X)|$*. Insbesondere gibt es zu jeder Kardinalzahl eine echt größere.*

Beweis

Angenommen es gäbe eine Surjektion $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Wir definieren

$$A := \{x \in X | x \notin f(x)\} .$$

Offenbar ist $A \subset X$. Aus der Surjektivität folgt nun: $\exists a \in X : f(a) = A$. Somit gilt $a \in A \Leftrightarrow a \notin f(a) = A$. Ein Widerspruch! Es gibt also keine Surjektion von X zu $\mathcal{P}(X)$. Das hat $\neg(|X| \geq |\mathcal{P}(X)|)$ zur Folge. □

Satz 11 (Cantor-Bernstein)**.** *Seien* X, Y *Mengen. Angenommen es gibt Injektionen* $f : X \to Y$, $g : Y \to X$*. Dann gilt:* $|X| = |Y|$.

Beweis

Seien $i : X \to |X|$ und $j : Y \to |Y|$ Bijektionen. Dann sind $j \circ f \circ i^{-1} : |X| \to |Y|$ und $i \circ g \circ j^{-1} : |Y| \to |X|$ injektive Abbildungen. Es gilt nach Satz 7 somit $|X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |X|$. Folglich gilt $|X| = |Y|$. □

4 DIE KONTINUUMSHYPOTHESE

Die von CANTOR aufgestellte *Kontinuumshypothese* besagt, dass keine überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ existiert mit der Eigenschaft, dass ihre Mächtigkeit kleiner ist als die von $\mathbb{R}$ selbst. Kurz ausgedrückt:

$$\aleph_1 = |\mathbb{R}| .$$

KURT GÖDEL und PAUL COHEN zeigten schließlich, dass die Kontinuumshypothese vom ZFC-Axiomensystem unabhängig ist, d.h. sie kann mit den Zermelo-Fraenkel-Axiomen weder bewiesen noch widerlegt werden. Bei einigen mathematischen Aussagen führt dies dazu, dass auch diese sowohl wahr als auch falsch sind - je nachdem ob man die *Kontinuumshypothese* als wahr oder falsch voraussetzt. Ein Beispiel solch einer mathematischen Aussage, deren Wahrheitsgehalt von jenem der *Kontinuumshypothese* abhängt, ist der folgende von WETZEL stammende Satz:

4.1 SATZ ÜBER HOLOMORPHE FUNKTIONEN

Sei $\{f_\alpha\}$ eine Familie von paarweise verschiedenen holomorphen Funktionen auf de komplexen Zahlen. Die Eigenschaft, höchstens abzählbar viele Werte zu erreichen, sei mit (P_0) bezeichnet.

Die Frage, auf die der folgende Satz eingeht, ist, ob aus dieser Eigenschaft (P_0) folgt, dass die Familie $\{f_\alpha\}$ selbst höchstens abzählbar ist:

Satz 12. *Sei $\{f_i\}_{i\in I}$ eine Familie von paarweise verschiedenen holomorphen Funktionen, so dass gilt: $\forall z \in \mathbb{C} : |\{f_i(z)\}_{i\in I}| \leq \aleph_0$.*

1. *Wenn $|\mathbb{R}| > \aleph_1$, dann gilt $\{f_i\}_{i\in I}$ ist abzählbar für jede Familie, die (P_0) erfüllt.*
2. *Wenn $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, dann existiert eine Familie $\{f_i\}_{i\in I}$ mit der Eigenschaft (P_0), welche überabzählbar ist.*

Beweis

ad Fall 1:

Sei also $|\mathbb{R}| > \aleph_1$, wir zeigen die Behauptung durch Kontraposition: Wenn $|\{f_i\}_{i\in I}| > \aleph_0$, so folgt $\exists z_0 \in \mathbb{C} : |\{f_i(z_0)\}_{i\in I}| > \aleph_0$.
O.B.d.A gelte $|\{f_i\}_{i\in I}| = \aleph_1$. Nach dem Wohlordnungssatz, können wir $\{f_i\}_{i\in I}$ wohlordnen. Es gilt also: $\{f_i\}_{i\in I} = \{g_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$.

Nun zeigen wir, dass die Menge $\{(\alpha, \beta)|\alpha < \beta < \omega_1\}$ Kardinalität $\aleph_1$ hat. Da alle $\alpha \in \omega_1$ abzählbar sind, gilt: $\forall 1 < \beta < \omega_1 : 0 < |\{(\alpha, \beta)|\alpha < \beta\}| \leq \aleph_0$. Also folgt: $1 \cdot \aleph_1 \leq |\bigcup_{0<\beta<\omega_1} \{(\alpha, \beta)|\alpha < \beta\}| \leq \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$. Also gilt $|\{(\alpha, \beta)|\alpha < \beta < \omega_1\}| = \aleph_1$.
Aus der Funktionentheorie wissen wir, dass zwei verschiedene, ganze (d.h. auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe) Funktionen höchstens an abzählbar vielen Stellen übereinstimmen.

Für $\alpha < \beta < \omega_1$ gilt also: $|\{z \in \mathbb{C} | f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}| \leq \aleph_0$. Daraus folgt:

$$|\bigcup_{\alpha<\beta<\omega_1} \{z \in \mathbb{C} | f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}| \leq \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1 < |\mathbb{R}|.$$

Wir sehen also, dass es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ gibt, mit $\forall \alpha < \beta < \omega_1 : z_0 \notin \{z \in \mathbb{C} | f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$. Also gilt: $\forall \alpha, \beta < \omega_1 : f_\alpha(z_0) \neq f_\beta(z_0)$. Damit folgern wir: $|\{f_i(z)\}_{i \in I}| = \aleph_1 > \aleph_0$. Daraus folgt Behauptung 1.

ad Fall 2:

Sei jetzt $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Wir konstruieren eine Familie $\{f_i\}_{i \in I}$ von paarweise verschiedenen holomorphen Funktionen, mit der Eigenschaft: $|\{f_i\}_{i \in I}| = \aleph_1 \wedge \forall z \in \mathbb{C} : |\{f_i(z)\}_{i \in I}| \leq \aleph_0$. Sei $\{f_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ eine Wohlordnung von $\mathbb{C}$. Wir konstruieren eine Familie $\{f_\beta\}_{\beta < \omega_1}$ mit der Eigenschaft: $\forall \alpha < \beta : f_\beta(z_\alpha) \in \mathbb{Q}(i) := \{p + iq | p, q \in \mathbb{Q}\}$. Für so eine Familie gilt nämlich:

$$\{f_\beta(z_\alpha)\}_{\beta < \omega_1} = \{f_\beta(z_\alpha)\}_{\beta \leq \alpha} \cup \{f_\beta(z_\alpha)\}_{\beta > \alpha} \subset \{f_\beta(z_\alpha)\}_{\beta \leq \alpha} \cup \mathbb{Q}(i)\,.$$

Also gilt für die Kardinalität:

$$|\{f_\beta(z_\alpha)\}_{\beta < \omega_1}| \leq |\mathbb{Q}(i)| + |\{f_\beta(z_\alpha)\}_{\beta \leq \alpha}| \leq \aleph_0 + \aleph_0 = 2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0\,.$$

Die Konstruktion erfolgt mittels *transfiniter Induktion*. Wir definieren f_0 gleich der Nullfunktion. Angenommen wir haben für ein beliebiges $\gamma < \omega_1$ alle f_ξ mit $\xi < \gamma$ bereits konstruiert. Da γ abzählbar ist, können wir $\{f_\alpha\}_{\alpha < \gamma}$ und $\{z_\alpha\}_{\alpha < \gamma}$ als Folgen schreiben: $\{f_\alpha\}_{\alpha < \gamma} =: \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{z_\alpha\}_{\alpha < \gamma} =: \{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
Wir konstruieren die Funktion f_γ derart, dass Folgendes gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_\gamma(w_n) \in \mathbb{Q}(i) \text{ und } f_\gamma(w_n) \neq g_n(w_n) \tag{3}$$

Die erste Bedingung stellt sicher, dass Familie von Funktionen nur abzählbar viele verschiedene Funktionswerte annimmt. Die zweite Bedingung besagt, dass unser konstruiertes f_γ verschieden ist zu allen bisherigen f_α mit $\alpha < \gamma$.
Wir definieren f_γ nun wie folgt:

$$f_\gamma(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (z - w_1) \cdot \ldots \cdot (z - w_n)\,.$$

Für endliche γ ist f_γ ein Polynom, folglich holomorph. Somit ist sichergestellt, dass wir passende ε_i wählen können, sodass (3) erfüllt ist.
Sei nun γ abzählbar unendlich. Wie leicht zu sehen ist, sind die Werte $(\varepsilon_i)_{i>n}$ bedeutungslos für den Wert $f_\gamma(\omega_n)$. Somit können die ε_i induktiv gewählt werden, sodass die zweite Bedingung aus (3) erfüllt ist.

Da $\mathbb{Q}(i)$ dicht in $\mathbb{C}$ ist, lassen sich die ε_i so wählen, dass auch die erste der in (3) geforderten Eigenschaften gilt. Weiters soll die Folge der ε_i schnell genug gegen 0 konvergieren, damit f_γ eine holomorphe Funktion definiert. Dass dies möglich ist, zeigt der letzte Abschnitt des Beweises:

Es sei dazu $\{d_k | k \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Setze:

$$R_n(z) := \prod_{j=0}^{n-1} (z - w_j) \, .$$

Da die Funktion $|R_n|$ stetig ist, existiert das Maximum M_n auf die kompakte Menge $D_n := \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B}(d_k, \frac{1}{2})$. Für $0 < |\varepsilon_n| \leq \frac{1}{M_n \cdot 2^n}$ folgt somit:

$$|\varepsilon_n \cdot R_n(z)| \leq \frac{1}{2^n} \text{ für } z \in D_n \, .$$

Die Funktionenreihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cdot R_n(z)$ konvergiert also gleichmäßig auf $\overline{B}(d, \frac{1}{2})$ für alle $d \in \mathbb{Q}$. Folglich ist f eine holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Keith Devlin: *The joy of sets: fundamentals of contemporary set theory*, 2. edition, New York Springer 1993

[2] Martin Aigner , Günter M. Ziegler: *Das Buch der Beweise*, 3. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

[3] Thomas J. Jech: *Set theory*, New York Acad. Press 1978

[4] http://www.wikipedia.org