Übungen Einführung in die Algebra, SS 2018

Blatt 9, 6.6.2018

40. Sei $I_2 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(2) = 0\}$. Beweisen Sie, dass I_2 ein Ideal von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist. Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen modulo I_2 und zeigen Sie, dass die Menge der konstanten Funktionen auf $\mathbb{R}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})/I_2$ bildet.

41. Fortsetzung von 40. Sei $I_1 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$ ebenfalls ein Ideal in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$I_1 + I_2 = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad I_1 \cap I_2 = I_1 \cdot I_2.$$

42. Fortsetzung von 40. Beweisen Sie, dass

$$\psi\colon \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad \psi(f) = f(2),$$

ein Ringepimorphismus ist, und dass $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})/I_2$ isomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

43. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins 1_R. (Auch der Nullring ist möglich.) Beweisen Sie:

(a) Es gibt genau einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z} \to R$ und

$$\varphi(\mathbb{Z}) = \{z \cdot 1_R \mid z \in \mathbb{Z}\} =: R_0.$$

(b) R_0 ist der bezüglich Inklusion kleinste Unterring von R.

(c) Es gibt genau eine nichtnegative ganze Zahl n, so dass $R_0 \cong \mathbb{Z}/(n)$.

44. Sei R ein Ring, I, J Ideale von R mit $I + J = R$. Zeigen Sie, dass dann

$$I \cdot J + J \cdot I = I \cap J$$

gilt.