Übungen Einführung in die Algebra, SS 2018

Blatt 8, 30.5.2018

35. Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $S = \{\frac{m}{p^k} \mid m \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, dass S ein Teilring von $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Teilring R von $\mathbb{Q}$, der $\{1, \frac{1}{p}\}$ enthält, auch S enthält.

(c) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $S^\times$ von S.

36. Es sei R ein kommutativer Ring und $M = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq R$. Beweisen Sie, dass

$$(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \;\middle|\; r_i \in R \right\}.$$

37. Es sei R ein Ring, n eine positive ganze Zahl und I ein Ideal des Matrizenrings $M_n(R)$. Wir bezeichnen mit J die Menge aller $r \in R$ für die es eine Matrix $(a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in I$ und $k, l \in \{1, \dots, n\}$ mit $a_{kl} = r$ gibt. Zeigen Sie:

(a) J ist ein Ideal in R.

(b) $I = M_n(J) := \{(a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(R) \mid \forall\, i, j = 1, \dots, n : a_{ij} \in J\}$.

(c) Ist R einfach, so auch $M_n(R)$.

38. Sei $R = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

(a) R ist ein Unterring von $\mathbb{R}$.

(b) Jedes $r \in R$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $r = a + b\sqrt{7}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$.

(c) Die Abbildung
$$f \colon R \to \mathbb{Z}/29\mathbb{Z}, \qquad a + b\sqrt{7} \mapsto a + 6b + 29\mathbb{Z}$$
ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

(d) Der Kern von f ist das von $-6 + \sqrt{7}$ erzeugte Ideal.

39. Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $a \in R$ heißt nilpotent, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$ gibt. Der Ring R heißt reduziert, falls 0 das einzige nilpotente Element in R ist. Zeigen Sie:

(a) Die Menge N aller nilpotenten Elemente in R ist ein Ideal in R.

(b) Der Ring R/N ist reduziert.