Übungen Einführung in die Algebra, SS 2018

Blatt 7, 16.5.2018

30. Zeigen Sie: Ist G eine endliche abelsche nicht zyklische Gruppe, dann existiert eine Primzahl p, so dass G eine Untergruppe der Form $C_1 \times C_2$ besitzt mit $C_1 \cong C_2 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

31. Sei $D_n = \langle a, b \rangle$ mit $\mathrm{ord}(a) = n$, $n \geq 2$, $\mathrm{ord}(b) = 2$ und $bab = a^{-1}$.

Berechnen Sie die Ordnung von D_n. Ist D_n abelsch? Unter welchem Namen kennt man D_2? Ist $D_3 \cong S_3$? Zeigen Sie, dass D_n einen Normalteiler isomorph zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ besitzt. Berechnen Sie das Zentrum $Z(D_n)$ und beweisen Sie, dass

$$\mathrm{Inn}(D_n) \cong \begin{cases} D_n & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 2, \\ \{1\} & \text{falls } n = 2, \\ D_n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \text{falls } n > 2,\ n \equiv 0 \bmod 2. \end{cases}$$

Eine zu D_n isomorphe Gruppe heißt *Diedergruppe*.

32. Sei G eine Gruppe der Ordnung $2p$, p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass G entweder zyklisch oder die Diedergruppe D_p ist.

Hinweise: Unterscheiden Sie die Fälle $p = 2$ und $p > 2$. Falls $p > 2$ und G nicht zyklisch ist, zeigen Sie mit einem indirekten Beweis, dass es ein Element $a \in G$ gibt, mit $\mathrm{ord}(a) = p$. Warum gilt dann $\mathrm{ord}(b) = 2$ für $b \in G \setminus \langle a \rangle$? Folgern Sie daraus, dass $bab = a^{-1}$ erfüllt ist.

33. Es gelte $G \cong G'$ und $H \cong H'$. Zeigen Sie, dass $G \times H$ zu $G' \times H'$ isomorph ist.

34. Zeigen Sie

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}.$$