Übungen Einführung in die Algebra, SS 2018

Blatt 6, 9.5.2018

24. Sei
$$D = \{dI_n \mid d \in \mathbb{C}^\times\}$$
die Menge der nicht verschwindenden $n \times n$-Diagonalmatrizen über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) $D \trianglelefteq GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{C})$

(b) $GL_n(\mathbb{C}) = D \cdot SL_n(\mathbb{C})$

Ist das Produkt in (b) direkt?

25. Wieviele nicht isomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 28 gibt es?

26. Es sei G eine Gruppe, sodass $G/Z(G)$ zyklisch ist. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

27. Geben Sie ein Beispiel einer nicht abelschen Gruppe G an, sodass $G/Z(G)$ abelsch ist.

28. Seien $p \neq q$ zwei Primzahlen. Zeigen Sie, dass jede abelsche Gruppe der Ordnung pq zyklisch ist.

29. (a) Sei $(G, \cdot)$ eine endliche abelsche Gruppe mit neutralem Element e. Wir nehmen an, dass es für jeden Teiler d der Gruppenordnung höchstens d Elemente $g \in G$ mit $g^d = e$ gibt. Zeigen Sie, dass G dann zyklisch ist.

(b) Sei G eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe $K^\times$ eines Körpers K. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.