Übungen Einführung in die Algebra, SS 2018

Blatt 5, 2.5.2018

19. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ isomorph zu $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

20. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $(H, +)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Hom}(G, H) = \{f\colon G \to H : f \text{ ist ein Gruppenhomomorphismus }\}$$

zusammen mit der Verknüpfung $(f_1 \oplus f_2)(g) := f_1(g) + f_2(g)$, $g \in G$, $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(G, H)$ eine abelsche Gruppe bildet.

Beweisen Sie weiters:

(a) $\varphi\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, H) \to H$, $\varphi(f) = f(1)$, ist ein Isomorphismus.

(b) $\varphi\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, H) \to \{h \in H : \mathrm{ord}(h) \mid n\}$, $\varphi(f) = f(1+n\mathbb{Z})$, ist ein Isomorphismus.

21. Sei $G = \mathbb{Z}^2$. Zeigen Sie, dass $H = \{(x, y) \in G : 3x - 2y = 0\}$ eine Untergruppe von G ist, und beweisen Sie, dass $G/H \cong \mathbb{Z}$ gilt.

22. Sei H eine Untergruppe der abelschen Gruppe $(G, +)$. Zeigen Sie: aus $G/H \cong \mathbb{Z}$ folgt, dass es eine Untegruppe H' von G gibt, so dass G von der Form $H + H'$ mit $H \cap H' = \{0\}$ ist. Weiters ist $H' \cong \mathbb{Z}$.

23. Sei $\varphi\colon G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie, dass die Abbildung $U \mapsto \varphi(U) = \{\varphi(u) : u \in U\}$ eine Bijektion zwischen $\{U : \ker\varphi \leq U \leq G\}$ und $\{V : V \leq H\}$ darstellt.