

Übungen Einführung in die Algebra, SS 2018

Blatt 4, 18.4.2018

- 15.** Es sei (G, \cdot) eine Gruppe. Für zwei Elemente $a, b \in G$ gelte, $ab = ba$, $\text{ord}(a) = m$, $\text{ord}(b) = n$, $n, m < \infty$. Sei $d = \text{ggT}(m, n)$. Zeigen Sie:

(a) $\text{ord}(ab) < \infty$ und

$$\frac{mn}{d^2} \mid \text{ord}(ab) \mid \frac{mn}{d} = \text{kgV}(m, n).$$

(b) Ist $d = 1$ dann ist $\text{ord}(ab) = mn$.

(c) Ist $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$, dann ist $\text{ord}(ab) = \text{kgV}(m, n)$.

- 16.** Es sei (G, \cdot) eine zyklische Gruppe der Ordnung 24, die vom Element $s \in G$ erzeugt wird. Geben Sie alle Elemente von G an, bestimmen Sie

$$K = \{\text{ord}(x) \mid x \in G\},$$

und geben Sie für jedes $k \in K$ an, wie viele Elemente der Ordnung k die Gruppe G besitzt!

- 17.** Berechnen Sie alle Untergruppen H der im Beispiel 16 gegebenen Gruppe G sowie deren Indizes $(G : H)$!
- 18.** Es seien G, H endliche zyklische Gruppen mit $\text{ggT}(|G|, |H|) = 1$. Zeigen Sie, dass $G \times H$ zyklisch ist. (Hinweis: Verwenden Sie Beispiel 15.)