Übungen Einführung in die Algebra, SS 2018

Blatt 3, 11.4.2018

10. Es sei H die von 6 und 15 erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Zeigen Sie,

$$H = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

11. (a) Es seien $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq M \subset G$ eine Menge. Zeigen Sie

$$\langle M \rangle = \{g_1^{e_1} g_2^{e_2} \cdots g_n^{e_n} \mid n \in \mathbb{N},\ g_i \in M,\ e_i \in \mathbb{Z},\ 1 \leq i \leq n\}.$$

(b) Es seien $(G, +)$ eine abelsche Gruppe, $n \in \mathbb{N}$ und $g_1, \ldots, g_n \in G$. Zeigen Sie

$$\langle g_1, \ldots, g_n \rangle = \{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n \mid \alpha_i \in \mathbb{Z},\ 1 \leq i \leq n\}.$$

12. Zeigen Sie, dass für

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

die Aussagen

$$|\{U^k V^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{Z}\}| < \infty, \text{ aber } |\langle U, V \rangle| = \infty$$

gelten. (Hinweis: Untersuchen Sie $(UV)^n$, $n \in \mathbb{N}$.)

13. Beweisen Sie, dass

$$H = \left\{ \frac{m}{7^k} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

eine nicht endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist.

14. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $(S_n, \circ)$ die symmetrische Gruppe und $H = \{\pi \in S_n \mid \pi(n) = n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe der S_n ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Abbildung $\varphi\colon S_n/H \to \{1, \ldots, n\}$, $\pi H \mapsto \pi(n)$, wohldefiniert und bijektiv ist. Berechnen Sie daraus den Index $(S_n : H)$.

(c) Zeigen Sie, dass H isomorph zur Gruppe S_{n-1} ist.

(d) Folgern Sie mit Induktion aus (b) und (c), dass die Ordnung von S_n gleich $n!$ ist.