Übungen Einführung in die Algebra, SS 2018

Blatt 2, 21.3.2018

5. Es seien X, Y, Z Verknüpfungsgebilde und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g Homomorphismen, so ist auch $g \circ f$ ein Homomorphismus.

(b) Ist $g \circ f$ ein Homomorphismus und ist f ein surjektiver Homomorphismus, so ist auch g ein Homomorphismus.

(c) Ist f ein Isomorphismus, so ist f^{-1} ein Isomorphismus.

6. Es sei $M = GL_2(\mathbb{R})$ die Menge aller invertierbaren reellen 2×2-Matrizen. Für $A, B \in M$ gelte $A \sim B \iff \det(A) = \det(B)$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist, und dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

ein Repräsentantensystem für $\sim$ ist.

7. Es seien X, Z Mengen, $f\colon X \to Z$ eine Abbildung, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi\colon X \to X/{\sim}$, $x \mapsto [x]_\sim$ die kanonische Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Gilt $x \sim y \implies f(x) = f(y)$ für alle x, $y \in X$, so gibt es genau eine Abbildung $\bar{f}\colon X/{\sim} \to Z$ mit $\bar{f} \circ \pi = f$.

(b) $\bar{f}$ ist genau dann surjektiv, wenn f surjektiv ist.

(c) $\bar{f}$ ist genau dann injektiv, wenn $f(x) = f(y) \implies x \sim y$ für alle x, $y \in X$ gilt.

8. Es sei $(A, *)$ ein assoziatives Verknüpfungsgebilde mit den Eigenschaften:

(G1) Es existiert ein $e \in A$, so dass für alle $a \in A$ gilt: $e * a = a$.

(G2) Für jedes $a \in A$ existiert ein $a' \in A$ mit $a' * a = e$.

Zeigen Sie, dass $(A, *)$ eine Gruppe ist.

9. Es sei $(G, \cdot)$ ein Gruppe mit neutralem Element $e_G \in G$ und $\emptyset \neq H \subseteq G$ eine nicht leere Teilmenge, die abgeschlossen bezüglich $\cdot$ ist. Zeigen Sie:

(a) Besitzt $(H, \cdot)$ ein neutrales Element $e_H \in H$, so gilt $e_H = e_G$.

(b) Ist $(H, \cdot)$ eine Halbgruppe und besitzt $a \in H$ ein inverses Element in $(H, \cdot)$, so stimmt dieses mit dem inversen Element von a in $(G, \cdot)$ überein.