Übungen Einführung in die Algebra, SS 2018

Blatt 10, 13.6.2018

45. Es seien R, S Ringe, $\varphi\colon R \to S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und I ein Ideal von R mit $\ker(\varphi) \subset I$. Konstruieren Sie einen Ringisomorphismus $R/I \cong S/\varphi(I)$.

Wir nehmen nun an, dass R und S kommutativ sind. Zeigen Sie dann, dass I genau dann ein Primideal (bzw. maximales Ideal) ist, wenn $\varphi(I)$ eines ist.

46. Für $M \subset \mathbb{R}$ sei I_M die Menge aller Funktionen in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die auf M gleich 0 sind. Sie können als bekannt annehmen, dass I_M ein Ideal in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) I_M ist ein maximales Ideal.

(b) I_M ist ein Primideal.

(c) M enthält genau ein Element.

47. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) R besitzt genau ein maximales Ideal.

(b) $R \setminus R^\times$ ist ein Ideal von R.

Kommutative Ringe, die eine (und damit beide) dieser Eigenschaften haben, nennt man lokal.

48. Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\, p \nmid b \right\}$$

ein lokaler Unterring von $\mathbb{Q}$ ist.

49. Sei R ein kommutativer Ring und P ein Ideal in R. Beweisen Sie, dass P genau dann ein Primideal ist, wenn für alle Ideal I und J von R mit $I \cdot J \subseteq P$ gilt: $I \subseteq P$ oder $J \subseteq P$.