Übungen Einführung in die Algebra, SS 2018

Blatt 1, 14.3.2018

1. Auf der Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen wird eine Operation $*$ folgendermaßen definiert:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \qquad x * y := xy + 2x + 2y + 2.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $*$ eine kommutative Halbgruppe ist und ein neutrales Element besitzt! Bestimmen Sie alle invertierbaren Elemente, und geben Sie deren Inverse an!

2. Es sei $M = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ das abgeschlossene Intervall mit Randpunkten -1 und 1. Für $x, y \in M$ definieren wir

$$x \diamond y := \max\bigl\{\min\{x + y, 1\}, -1\bigr\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\diamond$ eine Verknüpfung auf M definiert, und untersuchen Sie, ob diese kommutativ bzw. assoziativ ist!

(b) Untersuchen Sie, ob das Verknüpfungsgebilde $(M, \diamond)$ ein neutrales Element besitzt bzw. welche Elemente invertierbar sind!

3. Es sei $(M, \cdot)$ ein Verknüpfungsgebilde. Wir erhalten dann das Verknüpfungsgebilde $(\mathcal{P}(M), *)$ mit

$$N * N' = \{x \cdot y \mid x \in N, y \in N'\}$$

für alle N, N' aus der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $(M, \cdot)$ assoziativ (kommutativ) so auch $(\mathcal{P}(M), *)$.

(b) Besitzt $(M, \cdot)$ ein neutrales Element, so auch $(\mathcal{P}(M), *)$.

(c) Wir nehmen an, dass $(M, \cdot)$ ein Monoid ist, das ist eine Halbgruppe mit neutralem Element. (Dann ist nach (a) und (b) auch $(\mathcal{P}(M), *)$ ein Monoid.) Bestimmen Sie die Menge der invertierbaren Elemente von $(\mathcal{P}(M), *)$.

4. Es sei $(M, \circ)$ ein Verknüpfungsgebilde. Für ein fest gewähltes Element $u \in M$ wird auf M eine weitere Operation $*$ definiert durch $a * b := (a \circ u) \circ b$. Zeigen Sie:

(a) Ist die Operation $\circ$ assoziativ, so ist auch $*$ assoziativ.

(b) Ist die Operation $\circ$ assoziativ und kommutativ, so ist auch $*$ kommutativ.

(c) Ist $(M, \circ)$ eine Halbgruppe mit neutralem Element und ist u bezüglich $\circ$ invertierbar, dann besitzt auch $(M, *)$ ein neutrales Element.