Mathematisches Seminar für LAK

Graphentheorie

Matrix Theory (Kapitel 8.1-8.3)

Robert Seebacher

Matrikelnummer: 00910340

SS 2018

Betreuerin:

Univ.-Prof. Dr. phil. Karin Baur

Karl-Franzens-Universität Graz

1 Einleitung

In dieser Seminararbeit wird auf Grundlage des Buchs „Algebraic Graph Theory" von Chris Godsil und Gordon Royle die Einführung in die Matrixtheorie gegeben. Dabei sind folgende Definitionen als bekannt vorauszusetzen: (Godsil & Royle, 2001)

- Graph G(V,E)
- Gerichteter Graph
- Adjazent
- Inzident
- Pfad
- Isomorph
- Grad
- Bipartiter Graph
- Komponenten (Zusammenhängender Graph)
- Kantengraph

Die Hauptaufgabe von dieser Arbeit ist es Graphen und deren Eigenschaften in eine algebraische Struktur zu fassen. Als geeignete Struktur werden Matrizen eingeführt und deren Zusammenhänge erläutert.
Generell werden im weiteren Verlauf nur Graphen ohne Schleifen betrachtet.

2 Die Adjazenzmatrix

Definition 1: Die Adjazenzmatrix A(X) von einem gerichteten Graphen X ist eine Matrix, deren Einträge angeben, welche Knoten benachbart (adjazent) sind. Ihre Zeilen und Spalten sind den einzelnen Knoten von X zugeteilt, sodass der ij-Eintrag von A(X) die Anzahl der Verbindungen von dem Knoten i zum Knoten j angibt.

Wie diese Matrizen genau ausschauen, hängt sehr von der Art des Graphen ab.

- Ungerichtete Graphen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \{i,j\} \in E(X) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

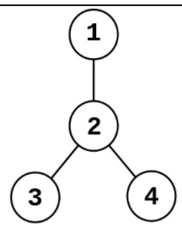

Abbildung 1:ungerichteter Graph
(Wikipedia, 2018)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Gerichtete Graphen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E(X) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

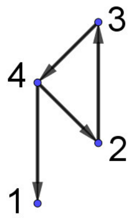

Abbildung 2:gerichteter Graph

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus resultiert, dass sich die Matrizen von Graphen unterscheiden, auch wenn sie isomorph zueinander sind. Doch durch Anwendung der linearen Algebra auf diese Matrizen können folgende Zusammenhänge gefunden werden.

<u>Lemma 8.1.1:</u> Seien X und Y gerichtete Graphen mit derselben Knotenmenge. Dann sind sie genau dann isomorph, wenn es eine Permutationsmatrix P gibt, sodass gilt:

$$P^T A(X) P = A(Y)$$

<u>Beweis:</u> $G \cong G'$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ Bijektion g von $V(G)$ auf $V(G')$ $\wedge$ $\exists$Bijektion h von $E(G)$ auf $E(G')$:

$\forall e \in E(G)\colon \left(f_G(e) = (x,y) \Rightarrow f_{G'}\big(h(e)\big) = \big(g(x), g(y)\big) \right)$

$\Leftrightarrow$ Alle Kanten werden abgebildet $\wedge$ Alle Knoten werden abgebildet $\wedge$ Alle Nachbarn bleiben gleich (auch gleich gerichtet)

$\Leftrightarrow$ 1. Bedingung: $A(G)$ und $A(G')$ haben selbe Dimension (gleich viele Kanten)

2. Bedingung: $A(G)$ und $A(G')$ haben gleich viele Einträge $\neq 0$ (Gleich viele gerichtete Kanten)

3. Bedingung: P^T vertauscht die gleichen Zeilen wie P Spalten, wodurch sich nur die Bezeichnung vertauscht (Nachbarn bleiben erhalten)

$\square$

Weil ja Permutationsmatrizen orthogonal sind ($P^T = P^{-1}$) und wenn X, Y isomorph sind, dann sind A(X) und A(Y) ähnlich. (Tinhofer, 1976)

Definition 2: Das charakteristische Polynom $\phi(X, x)$ von einem Graphen X ist geleichbedeutend mit dem charakteristischen Polynom seiner Matrix A(X) mit:

$$\phi(A, x) = \det(xI - A)$$

Definition 3: Das Spektrum von A(X) bzw. X ist eine Liste von deren Eigenwerten mit der zugehörigen Vielfachheit.

Definition 4: Zwei Graphen X, Y sind cospektral, wenn sie das gleiche Spektrum besitzen.

Mit dem Lemma 8.1.1 sehen wir zwar, dass das Spektrum invariant unter einem Isomorphismus ist. Dennoch sagt das Spektrum nicht, ob zwei Graphen isomorph sind.

Beispiel: Graph 1 und Graph 2 sind zwar nicht isomorph, haben aber das gleiche charakteristische Polynom $\phi = (x + 2)(x + 1)^2(x - 1)^2(x^2 - 2x - 6)$

und somit auch das gleiche Spektrum $\{-2, -1^{(2)}, 1^{(2)}, 1 \pm \sqrt{7}\}$.

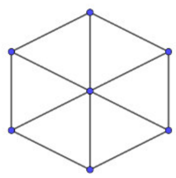

Abbildung 3: Graph 1

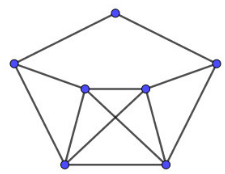

Abbildung 4: Graph 2

Wie man bei diesem Beispiel sehen kann, legt das Spektrum weder den Grad der Knoten fest, noch zeigt es an, ob der Graph planar ist.

Die Frage ist somit, welche Informationen aus dem Spektrum geschlossen werden können. In Lemma 8.1.2 und Korollar 8.1.3 werden Eigenschaften erkannt, die auf die Eigenwerte zurückgeführt werden können.

Definition 5: Ein Weg der Länge r in einem gerichteten Graphen ist eine Reihenfolge von Knoten $v_0 \sim v_1 \sim \cdots \sim v_r$,die über gerichtete Kanten durchlaufen werden können. Dabei ist eine Mehrfachnutzung eines Knotens erlaubt.

Definition 6: Ein geschlossener Weg ist ein Weg, dessen erster und letzter Knoten übereinstimmt.

<u>Lemma 8.1.2:</u> Sei X ein gerichteter Graph mit der Adjazenzmatrix A(X). Die Anzahl der Wege mit Länge r vom Knoten u zum Knoten v im Graphen X kann bestimmt werden durch: $(A^r)_{uv}$

<u>Beweis:</u> durch Induktion

IV: $r = 1$: ok laut Definition von Adjazenzmatrix

IS: $r = 2: (AA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$ mit a_{ik} = alle Wege von i nach k, a_{kj} = alle Wege von k nach j

$$r = n: (A^n)_{ij} = \sum_{k_{n-1}=1}^{d} \cdots \sum_{k_1=1}^{d} a_{ik_{n-1}} a_{k_{n-1}k_{n-2}} \cdots a_{k_2k_1} a_{k_1j}$$

$$r = n+1: (A^{n+1})_{ij} = \sum_{k_n=1}^{d} \cdots \sum_{k_1=1}^{d} a_{ik_n} a_{k_nk_{n-1}} \cdots a_{k_2k_1} a_{k_1j} = \sum_{k_n=1}^{d} a_{ik_n} (A^n)_{k_nj}$$

$\Rightarrow$ Weg von i nach j mit n+1 Länge

□

<u>Definition 7:</u> Die <u>Spur</u> (trace) von einer quadratischen Matrix ist die Summe deren Diagonaleinträge und wird bezeichnet mir tr(A).

Mit Hilfe vom Lemma 8.1.2 ergibt sich die Anzahl an geschlossenen Wegen mit Länge r in X durch tr(A). Dadurch können auch noch weitere Beziehungen, wie im nachfolgenden Korollar gefunden werden.

<u>Korollar 8.1.3:</u> Sei X ein ungerichteter Graph mit e Kanten und t Dreiecken. Wenn A die Adjazenzmatrix von X ist, dann gilt:

1) $\mathrm{tr}(A) = 0$
2) $\mathrm{tr}(A^2) = 2e$
3) $\mathrm{tr}(A^3) = 6t$

<u>Beweis:</u>

1) Es sind keine Schleifen enthalten $\Rightarrow$ die Diagonaleinträge sind alle 0
2) Jede Kante hat 2 Knoten und somit 2 geschlossene Wege der Länge 2
3) Geschlossene Wege mit Länge 3 sind nur im Dreieck möglich, da durch eine Hin- und Herbewegung eine gerade Anzahl an Schritten (Länge) nötig ist, um zum Ausgangspunkt zurück zu kommen.

□

Für die Spur einer Matrix gilt:

$$\operatorname{tr}(A) \;=\; \text{Summe der Eigenwerte von A}$$

und die Eigenwerte können potenziert werden

$$\text{Eigenwerte von } A^r = (\text{Eigenwerte von } A)^r.$$

Daher legt das Spektrum die Anzahl an Kanten, Knoten und Dreiecken im Graphen X fest.

Diese Beobachtung kann allerdings leider nicht verallgemeinert werden, da schon zum 4-Zyklus Gegenbeispiele gefunden werden können.

3 Inzidenzmatrix (ungerichtet)

In diesem Kapitel werden ausschließlich ungerichtete Graphen betrachtet.

Definition 8: Die Inzidenzmatrix B(X) eines ungerichteten Graphen ist eine 01-Matrix, die angibt welcher Knoten auf welcher Kante liegt. Dabei sind die Zeilen den Knoten und die Spalten den Kanten von X zugeordnet, sodass der ij-Eintrag die eins ergibt, wenn der Knoten i in der Kante j liegt. Ein Graph X mit n Knoten und k Kanten ergibt für B(X) eine $n \times k$ Matrix.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit } X = (V, E), E = \{e_1, \dots, e_k\}, V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

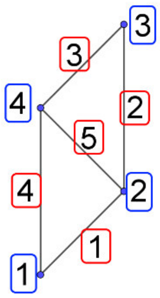

Abbildung 5: Ungerichteter Graph mit Bezeichnungen

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Als Anmerkung sei erwähnt, dass der Rang einer Adjazenzmatrix nur numerisch berechnet werden kann, allerdings der Rang einer Inzidenzmatrix eine analytische Lösung besitzt.

Theorem 8.2.1: Sei X ein ungerichteter Graph mit n Kanten und sei c_0 die Anzahl an bipartit Zusammenhangskomponenten von X. Wenn B die Inzidenzmatrix von X ist, dann ist ihr Rang rk(B) gegeben durch:

$$\operatorname{rk}(B) = n - c_0$$

Beweis: Ausgehend von der algebraischen Beziehung $\mathrm{rk}(B) = \dim(B) - \dim(\ker(B))$ ist noch zu zeigen, dass $\dim(B) = n$ und $\dim(\ker(B)) = c_0$ gilt.

- Der Vektorraum von den Spaltenvektoren ist die Anzahl der Zeilen und somit die Anzahl der Knoten n.
- $z \in \mathbb{R}^n$ und $z^{TB} = 0 \Rightarrow z \in \ker(B)$
  Wenn {u,v} eine Kante von X ist, dann hat B in der selben Spalte und in den Zeilen u und v jeweils einen Eintrag $\neq 0$. Somit muss der Vektor z an diesen Stellen $z_u + z_v = 0$ sein, damit die Gleichung $z^T B = 0$ gilt. Weiters hat die Matrix B in den Zeilen u'und v' keine Spalte mit einer 1, wenn sie nichrt auf einer gemeinsamen Kante $\{u', v'\}$ liegen. Daraus ergibt sich für die Bedingung an z, dass $z'_u = z'_v$ sein kann. Sei $\{u, v\}, \{v, w\}$ und $\{w, y\} \in E(X)$, dann gilt $z_u = -z_v = -(-z_w) = z_w = -z_y$. Daraus ergibt sich allgemein für Knoten u und v, die durch einen Pfad der Länge r verbunden sind $z_u(-1)^r z_v$. Wird z als Funktion von Knoten angesehen, dann hat sie für jede nicht bipartite Komponente nur Nullen als Einträge an dessen Knoten, weil mindestens einmal die Bedingung $z_u = -z_v \wedge z_v = -z_w \wedge z_w = -z_u$ vorkommt und das nur genau dann erfüllt ist, wenn alle $z_i = 0$ sind. Für die bipartiten Komponenten haben die Partitionsklassen entgegengesetzte Einträge $\neq 0$. Somit erhöht sich die Dimension vom Vektorraum des Vektors z für jede bipartit Zusammenhangskomponente um Eins und es gilt $c_0 = \dim(z)$. Indem $z \in \ker(B)$ ist ergibt sich der Zusammenhang $\dim(\ker(B)) = c_0$.

□

Lemma 8.2.2: Sei B die Inzidenzmatrix vom ungerichteten Graphen X und sei L der Kantengraph von X, dann gilt:

$$B^T B = 2I + A(L)$$

Beweis: $B^T B$ multipliziert die Spalten von B mit den Spalten von B, wodurch die Einträge eliminiert werden, dessen Kanten keinen gemeinsamen Knoten haben. Alle anderen Einträge sind eins, wie in der Adjazenzmatrix des Kantengraphen A(L). (Achtung: die Bezeichnung der Kanten muss den Knoten übergeben werden) Die Diagonaleinträge sind immer 2, da ja jede Kante genau zwei Knoten besitzt.

□

Definition 9: Sei X ein ungerichteter Graph mit n Knoten, dann ist $\Delta(X)$ die $n \times n$ Diagonalmatrix, deren Zeilen und Spalten den Knoten V(X) zugeordnet sind und deren ii-Eintrag gleich dem Grad vom Knoten i entspricht.

Lemma 8.2.3: Sei B die Inzidenzmatrix vom ungerichteten Graphen X, dann gilt:

$$BB^T = \Delta(X) + A(X)$$

Beweis: BB^T entspricht einer Multiplikation der Zeilen von B. Wird eine Zeile i mit sich selbst multipliziert, ergibt sich die Anzahl an Knoten für diese Kante i, da die Anzahl der Einträge ungleich Null addiert werden. Wird eine Zeile i mit einer Zeile j multipliziert ist der Eintrag ungleich null, wenn es eine Kante von i nach j gibt. Dies entspricht genau der Adjazenzmatrix A(X).

□

Das folgende Lemma 8.2.4 ist eine Beziehung aus der Algebra um das Lemma 8.2.5 beweisen zu können.

Lemma 8.2.4: Seien C und D Matrizen, sodass CD und DC definiert sind, dann gilt:

$$\det(I - CD) = \det(I - DC)$$

Beweis: aus linearer Algebra

Sei $X = \begin{pmatrix} I & C \\ D & I \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D & I \end{pmatrix} \Rightarrow XY = \begin{pmatrix} I - CD & C \\ 0 & I \end{pmatrix}$ und $YX = \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I - DC \end{pmatrix}$

$|\det(XY) = \det(YX)| \Rightarrow \det(I - CD) = \det(I - DC)$

□

Lemma 8.2.5: Sei X ein regulärer ungerichteter Graph mit Grad k, n Knoten und k Kanten. Sei L der Kantengraph von X. Dann gilt:

$$\phi(L, x) = (x + 2)^{k-n} \phi(X, x - k + 2)$$

Beweis: Ausgangspunkt ist das Lemma 8.2.4, worin $C = x^{-1}B^T$ und $D = B$ substituiert wird und x bzw. $x^{-1} \in \mathbb{R}$. Daraus ergibt sich:

$$\det(I_k - x^{-1}B^TB) = \det(I_n - x^{-1}BB^T)$$

$$\Leftrightarrow \det(x^{-1}(xI_k - B^TB)) = \det\left(x^{-1}(xI_n - BB^T)\right)$$

$$\Leftrightarrow (x^{-1})^k \cdot \det(xI_k - B^TB) = (x^{-1})^n \cdot \det(xI_n - BB^T)$$

$$\Leftrightarrow \det(xI_k - B^TB) = x^{k-n} \cdot \det(xI_n - BB^T)$$

Unter Berücksichtigung von Lemma 8.2.2 und Lemma 8.2.3 mit $\Delta(X) = kI$ ergibt sich:

$$\det\big((x-2)I_k - A(L)\big) = x^{k-n} \cdot \det\big((x-k)I_n - A(X)\big)$$

$$\Leftrightarrow \phi(L, x-2) = x^{k-n}\phi(X, x-k)$$

Wir ersetzen jetzt $x - 2 = \tilde{x}$ und erhalten endgültig:

$$\phi(L, \tilde{x}) = (\tilde{x}+2)^{k-n}\phi(X, \tilde{x} - k + 2)$$

$\square$

4 Die Inzidenzmatrix eines orientierten Graphen

Definition 10: Die Orientierung von einem Graphen X ist definiert als Funktion $\sigma\colon V(x) \mapsto \{-1,1\}$, sodass wenn (u,v) eine Kante ist, dass $\sigma(u,v) = -\sigma(v,u)$ gilt.

Es sei weiters definiert, dass $\sigma(u,v) = 1$ genau dann gilt, wenn eine Kante die Orientierung vom Fuß u bis zur Spitze v geht.

Definition 11: Ein orientierter Graph X^σ ist ein ungerichteter Graph X zusammen mit einer gewählten Orientierung σ.

Definition 12: Die Inzidenzmatrix $D(X^\sigma)$ von einem orientierten Graphen X^σ=(V,E, σ) ist die $\{0, \pm 1\} -$ Matrix, deren Einträge definiert sind durch:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & e_j = (v_i, x) \\ 0 & v_i \in e_j \\ -1 & e_j = (x, v_i) \end{cases} \qquad \text{mit } E = \{e_1, \dots, e_k\}, V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

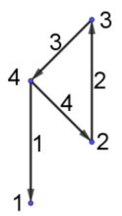

Abbildung 6: orientierter Graph

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ebenfalls wie schon bei den ungerichteten Graphen lassen sich folgende Beziehungen aufstellen, die zeigen, dass sie mehr vom Graphen X als von der Orientierung abhängen.

Theorem 8.3.1: Sei X ein ungerichteter Graph mit n Kanten und sei c die Anzahl an Zusammenhangskomponenten von X. Wenn σ eine Orientierung von X und D die Inzidenzmatrix von X^σ ist, dann ist ihr Rang rk(D) gegeben durch:

$$\mathrm{rk}(D) = n - c$$

Beweis: siehe Theorem 8.2.1 mit dem Zusatz, dass z konstant für jede Zusammenhangskomponente ist.

Lemma 8.3.2: Sei σ eine Orientierung von X und D die Inzidenzmatrix von X^σ, dann gilt:

$$DD^T = \Delta(X) + A(X)$$

Beweis: siehe Lemma 8.2.3 mit dem Zusatz, dass sich die Vorzeichen aufheben.

Wenn X ein planarer Graph ist, dann legt die Orientierung von X auch die Orientierung seines Dualen Graphen fest. Diese Orientierung von jeder Kante von X^σ ergibt sich durch eine Drehung der zugehörigen Kante von X um 90° gegen den Uhrzeigersinn (siehe Abbildung 7). Somit kann σ genutzt werden, um die Orientierung von X und X^σ festzulegen.

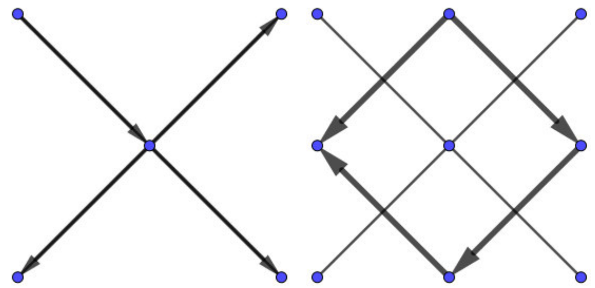

Abbildung 7: Orientierung der Kanten des dualen Graphen

Lemma 8.3.3: Sei X und Y zueinander duale planare Graphen und sei σ eine Orientierung von X. Wenn D und E Inzidenzmatrizen von X^σ und Y^σ sind, dann gilt:

$$DE^T = 0$$

Beweis: Wenn u eine Kante von X und F ein Gebiet ist, dann gibt es genau zwei Kanten auf u und in F. Diese werden mit g und h bezeichnet, wobei unter Berücksichtigung der Allgemeinheit h nach g kommt, wenn wir im Uhrzeigersinn um F gehen. Somit ergibt sich die uF-Einträge zu $(DE^T)_{uF} = D_{ug}E^T_{gF} + D_{uh}E^T_{hF}$. Wenn die Orientierung der Kante g entgegengesetzt ist, dann ändert sich der Wert von $D_{ug}E_{gF}^T$ nicht. Daher ist die Summe unabhängig von der Orientierung σ. Nehmen wir an, dass g die Spitze u hat und h den Fuß u hat. Daraus ergibt sich, dass die Kanten von Y, welche zu g und h gehören, die Spitze F haben. Wenn man das für jeden Eintrag aus der Summe macht, sieht man, dass die Summe gleich Null ist.

□

5 Quellen

https://de.wikipedia.org/wiki/Bipartiter_Graph
https://en.wikipedia.org/wiki/Path_(graph_theory)
https://de.wikipedia.org/wiki/Inzidenzmatrix
https://de.wikipedia.org/wiki/Isomorphie_von_Graphen
https://www.cs.colorado.edu/~yuvo9296/courses/csci2824/sect33-graphs2.html
https://de.wikipedia.org/wiki/Kantengraph
https://en.wikipedia.org/wiki/Degree_(graph_theory)
https://en.wikipedia.org/wiki/Regular_graph
https://en.wikipedia.org/wiki/Adjacency_matrix
https://en.wikipedia.org/wiki/Directed_graph
https://en.wikipedia.org/wiki/Orientation_(graph_theory)
https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_graph
https://de.wikipedia.org/wiki/Permutationsmatrix
https://de.wikipedia.org/wiki/Planarer_Graph
https://books.google.at/books?id=o5WLBwAAQBAJ&pg=PA74&lpg=PA74&dq=isomorphismus+und+permutationsmatrizen&source=bl&ots=QeojQKbeTd&sig=NuY5jASRrZld_vnHqJ1RrWUEN1A&hl=de&sa=X&ved=0ahUKEwiSkNnH7dvbAhVQEVAKHZWsAyAQ6AEIPTAD#v=onepage&q=isomorphismus%20und%20pe

6 Literaturverzeichnis

Godsil, C. D., & Royle, G. (2001). *Algebraic graph theory*. New York: Springer. ISBN 9780387952208.

Tinhofer, G. (1976). *Methoden der angewandten Graphentheorie*. Wien: Springer.

Wikipedia. (25. 6 2018). Von https://de.wikipedia.org/wiki/Adjazenzmatrix abgerufen