Seminararbeit zum Seminar „Mathematisches Seminar für LAK“

Gleichungen 5. Grades

Thomas Rösel (0914366)
Katharina Fercher (0912448)

Graz, am 22. April 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Allgemeines über Polynome **2**

3 Vorbereitungen **4**

4 Eigenschaften des Polynoms $x^5 - x + a$ **5**

5 Permutationen **6**

6 Permutationen der Nullstellen **7**

7 Änderungen von a und Permutationen von Zwischenwurzeln **10**

8 Kommutatoren von Schleifen **11**

9 Beweis des Hauptsatzes **13**

10 Résumé **13**

1 Einleitung

Die folgende Seminararbeit wurde im Rahmen der Lehrveranstaltung Nr. 621.452 „Mathematisches Seminar für LAK“ im Sommersemester 2013 an der Karl - Franzens Universität Graz geschrieben. Sie beschäftigt sich mit der Lösung von Gleichungen fünften Grades.
Genauer gesagt befasst sie sich mit dem Beweis des Satzes, dass Gleichungen 5. Grades nicht durch Wurzelausdrücke lösbar sind (wie Gleichungen vom Grad kleiner als 5). Um diesen einen Satz zu beweisen, bedarf es einer Vielfalt an Beweisen und Sätzen zur Vorbereitung. Genau diese werden hier von uns in dieser Arbeit behandelt, auch werden die dazu benötigten Definitionen genau angeführt.
Als Literatur diente zum einen das Buch „Ein Schaubild der Mathematik“ von Dmitry Fuchs und Serge Takachnikov, das im Jahr 2007 zum ersten Mal in Englisch unter dem Titel „Mathematical Omnibus“ erschien und 2010 auf Deutsch im Springer Verlag veröffentlicht wurde. Als Grundlage für die Ausarbeitung diente der Inhalt von Kapitel 5 (Gleichungen fünften Grades). Es wurde weiters das Vorlesungsskript Lineare Algebra von Frau Univ. Prof. Desch der Universität Graz verwendet, sowie das Buch Analysis 1 von Konrad Königsberger.
Für den Ausblick im Résumé wurde die Website http://www.galois-theorie.de/ herangezogen.

2 Allgemeines über Polynome

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Lösbarkeit von Gleichungen 5. Grades. Dazu führen wir zunächst einige wichtige Definitonen und Sätze ein.

Definition 2.1. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Polynomfunktion f über $\mathbb{K}$ ist eine Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \end{cases}$$

Dabei sind $a_0, \ldots, a_n$ Elemente aus dem Körper $\mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Definition 2.2. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.*

1. *Ein Polynom über $\mathbb{K}$ ist eine Folge $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ von Elementen $a_i \in \mathbb{K}$ bei der nur endlich viele Glieder von 0 verschieden sind.*
2. *Ist $p = (a_i)_{i=0}^{\infty} \neq 0$, so definieren wir den Grad (engl.: degree) von p durch*

$$deg(p) := \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$$

Da die Schreibweise durch Folgen unhandlich ist, schreiben wir:

$$(a_i)_{i=0}^{\infty} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Weiters nennen wir x die Unbestimmte. Die Menge der Polynome über $\mathbb{K}$, mit der Unbestimmten x geschrieben, bezeichnen wir mit $\mathbb{K}[x]$.

Satz 2.1 (Polynomdivision mit Rest)**.** *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, f,g zwei Polynome über $\mathbb{K}$ wobei $g \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome p,r mit den Eigenschaften:*

$$f = pg + r, \ deg(r) < deg(g)$$

Wir nennen r den Rest bei der Division von f durch g.

Satz 2.2. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $f \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom. Sei $\epsilon \in \mathbb{K}$ Nullstelle von $f = p(x - \epsilon) + r$. Dann ist ϵ genau dann eine Nullstelle von f, wenn $r = 0$, d.h., f ist durch $x - \epsilon$ ohne Rest teilbar.*

Wie man an der Gleichung $x^2 - 4x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$ leicht erkennt, kann es sein, dass doppelte Lösungen vorkommen. Zu diesem Zweck führen wir folgende Definition ein.

Definition 2.3. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $f \neq 0$ eine Polynomfunktion über $\mathbb{K}$ und $\epsilon \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von f. Die Vielfachheit der Nullstelle ϵ in f ist die größte Potenz m so, dass $(x - \epsilon)^m$ ein Teiler von f ist.*

Das Aufsuchen einer Nullstelle der dazugehörigen Polynomfunktion ist gleichbedeutend mit dem Lösen der algebraischen Gleichung. Aus der Analysis ist uns folgender Satz über die Lösungen einer Polynomfunktion bekannt:

Satz 2.3 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jede Gleichung*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \ (n > 0)$$

mit komplexen Koeffizienten a_k $(k \in \mathbb{N})$ *besitzt in* $\mathbb{C}$ *mindestens eine Lösung.*

Definition 2.4. *Als die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl* $a \in \mathbb{C}$ *bezeichnet man die Lösung der Gleichung* $z^n = a$*.*

Lemma 2.1. *Jede komplexe Zahl* $a \in \mathbb{C}$ *kann man in der Form* $a = |a|\, e^{i\varphi}$ *schreiben.*

Satz 2.4. *Die n-verschiedenen Lösungen der Gleichung* $z^n = a$*, für* $a \neq 0$ *kann man in folgender Form anschreiben:*

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot exp\left(\tfrac{i\varphi}{n} + k \cdot \tfrac{2\pi i}{n}\right) \text{ für } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Wir bezeichnen die Lösungen als n-te Einheitswurzeln.

Eine Gleichung fünften Grades (oder quintische Gleichung) ist also eine Polynomgleichung mit $deg(p) = 5$. Wir schreiben dies in der Form:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

die dazugehörige Polynomfunktion ist:

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \end{cases}$$

Aufgrund des Fundamentalsatzes wissen wir nun, dass unsere Gleichung zumindest eine Lösung und maximal fünf Lösungen besitzt. Im Folgenden betrachten wir nur mehr Polynome über dem Körper $\mathbb{C}$.

3 Vorbereitungen

Widmen wir uns nun der Lösbarkeit einer Gleichung vom Grad fünf. In dieser Arbeit geht es uns darum zu zeigen, dass es bei Gleichungen 5. Grades keine allgemeinen Lösungsformeln mit Wurzelausdrücken gibt. Das Paradebeispiel für eine solche Formel für ein Polynom 2. Grades wäre die „Kleine Lösungsformel“.

$$x^2 + px + q = 0$$

Dann gilt:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Wir können die Lösungen ohne weiteres folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= p^2 - 4q \\ x_2 &= -\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}x_1 \end{aligned}$$

Die Form von x_1 und x_2 nennen wir einen Wurzelausdruck. x_2 liefert uns die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Definition 3.1 (Wurzelausdruck)**.** *Sei $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ein Polynom über dem Körper $\mathbb{C}$. Die Gleichung $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ ist durch Wurzelausdrücke (Radikale) lösbar, wenn Polynome $p_1, \ldots, p_N$ (in $n, n+1, \ldots, n+N-1$ Variablen) und positive ganze Zahlen $k_1, \ldots, k_N$ existieren, sodass es zu jeder (komplexen) Nullstelle $x = x_N$ des Polynoms $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ zu gegebenen $a_1, \ldots, an$ (komplexe) Zahlen $x_1, \ldots, x_N$ gibt, die das System:*

$$\begin{aligned} x_1^{k_1} &= p_1(a_1, \ldots, a_n), \\ x_2^{k_2} &= p_2(a_1, \ldots, a_n, x_1), \\ &\vdots \\ x_N^{k_N} &= p_N(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_{N-1}) \end{aligned}$$

lösen.

Das Ziel unserer Arbeit ist es zu zeigen, dass es solche Wurzelausdrücke für eine allgemeine Gleichung 5. Grades nicht gibt.

Anmerkung: Durch umformen der Wurzelausdrücke kommen wir auf die „Lösungsformeln“.

Folgenden Satz zu beweisen, ist das Ziel unserer Arbeit:

Satz 3.1. *Die Gleichung*

$$x^5 - x + a = 0$$

ist nicht durch Wurzelausdrücke lösbar.

4 Eigenschaften des Polynoms $x^5 - x + a$

Proposition 4.1. *Hat die Polynomfunktion $x^5 - x + a$ Nullstellen deren Vielfachheit größer 1 ist, so ist $a^4 = \frac{4^4}{5^5}$ mit anderen Worten:*

$$a = \pm\frac{4}{5\sqrt[4]{5}} \quad \textit{oder} \quad a = \pm\frac{4i}{5\sqrt[4]{5}}$$

Für diese Proposition benötigen wir folgendes Hilfslemma:

Lemma 4.1. *Ist ϵ eine mehrfache Nullstelle der Polynomfunktion $x^5 - x + a$ dann gilt $5\epsilon^4 = 1$.*

Beweis Lemma 4.1 Sei ϵ eine mehrfache Nullstelle der Polynomfunktion $x^5 - x + a$ dann gilt nach Satz 2.2:
$x^5 - x + a = (x - \epsilon)^2 p(x)$, wobei p ein Polynom mit $deg(p) = 3$ ist. Sei nun $x := \epsilon + t, (t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *bel.*) Setzen wir dies in die Funktion ein:

$$(\epsilon + t)^5 - (\epsilon + t) + a = t^2 p(\epsilon + t) \Leftrightarrow$$
$$\epsilon^5 + 5t\epsilon^4 + t^2(10\epsilon^3 + 10\epsilon^2 t + 5\epsilon t^2 + t^3) - \epsilon - t + a = t^2 p(\epsilon + t)$$

Da ϵ eine Nullstelle ist gilt: $\epsilon^5 - \epsilon + a = 0$. Weiters dividieren wir durch t, dann sieht die Gleichung folgendermaßen aus:

$$5\epsilon^4 - 1 = t(p(\epsilon + t) - 10\epsilon^3 - 10\epsilon^2 t - 5\epsilon t^2 - t^3)$$

Da t beliebig gewählt wurde und unser Definitionsbereich auch beliebig ist kann man t betragsmäßig klein wählen. Das heißt: $5\epsilon^4 - 1 = 0$ q.e.d.

Nun können wir den Beweis von Proposition 4.1 führen.

Beweis Proposition 4.1 Aus Lemma 4.1 wissen wir $5\epsilon^4 = 1$ also $a^4 = (\epsilon - \epsilon^5)^4 = \epsilon^4(1 - \epsilon^4)^4 = \frac{1}{5} \cdot \frac{4^4}{5^4} = \frac{4^4}{5^5}$ q.e.d.

Wenn bei unserer Gleichung $x^5 - x - a = 0$ a einen der Werte $\pm\frac{4}{5\sqrt[4]{5}}, \pm\frac{4i}{5\sqrt[4]{5}}$ annimmt, haben wir eine doppelte Nullstelle. Ohne weitere Erklärung bezeichnen wir diese Punkte als gefährliche Punkte.

5 Permutationen

Definition 5.1. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt σ eine Permutation auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Mit $\mathfrak{S}_n$ bezeichnen wir die Menge aller Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$.*

Anmerkung: Für die Permutation $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ verwenden wir folgende Kurzschreibweise: $\alpha = (52341)$.

Definition 5.2. *Sei $\sigma \in \mathfrak{S}_n$*

1. *Ein Fehlstand von σ ist ein Paar (i, j) mit $i < j \in \{1, \ldots, n\}$ sodass $\sigma(j) < \sigma(i)$.*
2. *Sei m die Anzahl der Fehlstände von σ. Dann ist das Vorzeichen von σ*

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := (-1)^m \text{ oder äquivalent dazu}$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := \prod_{1 \le i < j \le n} \tfrac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

3. *Ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, so heißt σ eine gerade Permutation, sonst heißt σ eine ungerade Permutation. Sind zwei Permutationen beide gerade oder beide ungerade sprechen wir von „gleicher Parität“.*

Bemerkung: Die Menge $\mathfrak{S}_n$ bildet bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

Proposition 5.1. *Das Produkt zweier Permutationen mit derselben Parität ist gerade. Das Produkt zweier Permutationen mit entgegengesetzter Parität ist ungerade.*

Beweis Seien $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \prod_{1 \le i < j \le n} \tfrac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} = \prod_{1 \le i < j \le n} \tfrac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} \tfrac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} =$$
$$\prod_{1 \le \tau^{-1}(i) < \tau^{-1}(j) \le n} \tfrac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} \tfrac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$$

Aufgrund von dieser Gleichheit lässt sich Prop. 5.1 leicht ableiten, seien σ, τ gerade, dann gilt $1 \cdot 1 = 1$ also ist das Produkt $\sigma \circ \tau$ gerade. Der Rest folgt analog q.e.d.

Satz 5.1. *Jede Permutation der Gruppe $(\mathfrak{S}_5, \circ)$ lässt sich als Produkt folgender Permutationen darstellen:*

$$\alpha_1 = (52341),\ \alpha_2 = (15342),\ \alpha_3 = (12543),\ \alpha_4 = (12354)$$

Beweis Seien $\alpha_{1,\dots,4} \in \mathfrak{S}_5$ definiert wie oben, dann gilt:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_2\alpha_1\alpha_2 = (21345) & \beta_2 &= \alpha_3\alpha_2\alpha_3 = (13245) \\ \beta_3 &= \alpha_4\alpha_3\alpha_4 = (12435) & \beta_4 &= \alpha_4 = (12354) \end{aligned}$$

β_i vertauscht i mit $i+1$ und lässt die übrigen Zahlen gleich, man nennt sie auch elementare Vertauschungen. Wir können also jede beliebige Permutation mit Hilfe dieser elementaren Vertauschungspermutationen schreiben. q.e.d.

Definition 5.3. *Der Kommutator $[\alpha, \beta]$ zweier Permutationen α und β ist definiert als $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$*

Aufgrund von Proposition 5.1 ist zu erkennen, dass der Kommutator zweier beliebiger Permutationen eine gerade Permutation ist.

Satz 5.2. *Jede gerade Permutation ist ein Produkt von Kommutatoren gerader Permutationen.*

6 Permutationen der Nullstellen

Nun stellt sich die Frage wie Permutationen mit der Nullstellenfndung zusammenängen. Betrachten wir nun die Nullstellen der Funktion: $f(x) = \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto x^5 - x \end{cases}$
Diese hat offenbar die beiden komplexen Nullstellen $x_1 = i$, $x_2 = -i$, und drei reelle Nullstellen $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$. Betrachten wir nun einmal den rellen Graph der Funktion:

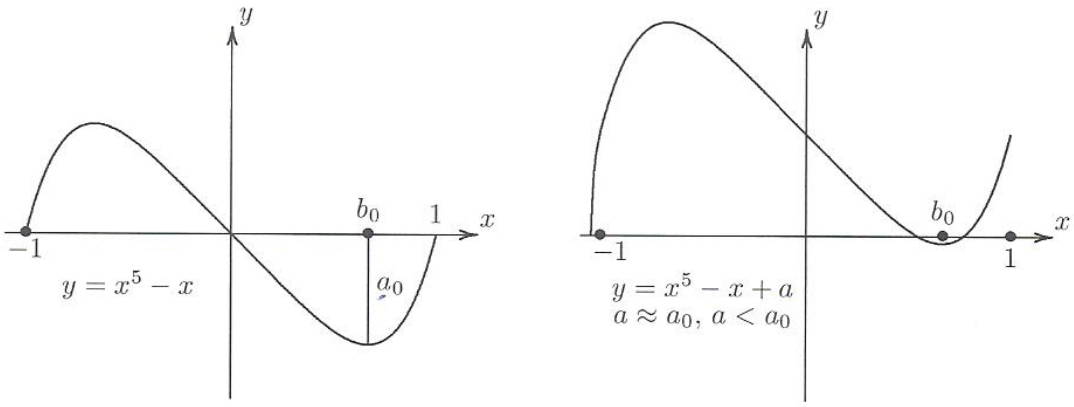

Abbildung 1: Der reelle Graph unserer Funktionen

Der eingezeichnete Punkt b_0 ist der Punkt an welchem die beiden reellen Nullsten eine

doppelte Nullstelle ergeben würden, wenn wir den Graph entlang der y-Achse verschieben. Wir bezeichnen a_0 als die zur x-Achse senkrechte Strecke zwischen dem Punkt b_0 und der Funktion. Nach Lemma 4.1 kennen wir den Wert für b_0, dieser ist $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$. Es stellt sich nun die Frage, was passiert mit unseren Nullstellen, wenn wir ein a zur Funktion hinzuaddieren, welches entlang der reellen Achse „in Richtung“a_0 geht, die Zahl umrundet (mit umrunden meint man kurz in die komplexen Zahlen ausweichen, so dass a grösser wird als a_0, aber nie gleich!) und wieder zum Ausganspunkt zurückkehrt. Wir bezeichnen diese „Wanderung“ von a als eine **Schleife**. Die folgende Grafik sollte dies veranschaulichen:

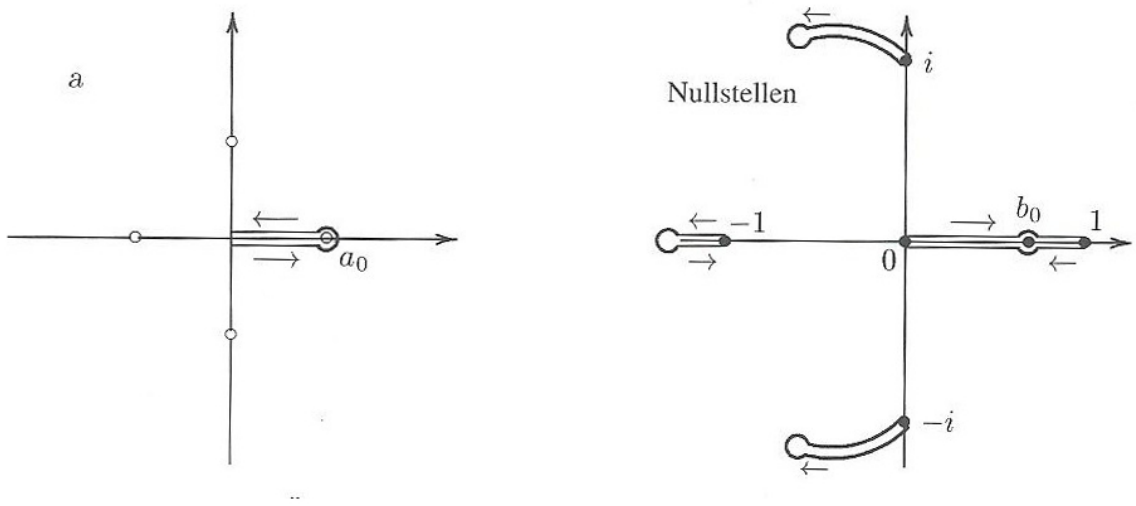

Abbildung 2: Änderung von a und die Änderung der Nullstellen

Die beiden Nullstellen x_4, x_5 haben ihre Positionen getauscht (d.h.: $x_4 = 0$, $x_5 = 1$).

Wir wollen die Nullstellen nun etwas genauer betrachten und verstehen, wie es dazu kommt.

Wie wir sehen können, bleibt die Nullstelle an der Stelle $x_3 = -1$ relativ unverändert, sie wandert nur etwas entlang der reellen-Achse nach links, vollführt dort eine ganze Drehung und kehrt wieder an ihre Ausgansposition zurück. Ebenso unbeindruckend verhalten sich die beiden komplexen Nullstellen $x_1 = i$, $x_2 = -i$, sie wandern etwas nach links entlang der reellen-Achse und bleiben bezüglich der imaginären-Achse auf ungefähr gleicher Höhe. Doch was passiert mit den beiden Nullstellen x_4 und x_5? Sie nähern sich einander entlang der rellen-Achse, an dem Punkt b_0 (der nicht erreicht wird weil a_0 nicht erreicht wird) vollführen die Nullstellen anstatt einer ganzen Drehung nur eine Halbdrehung und kehren jeweils zur Ausgangsposition der jeweils anderen Nullstelle zurück.

Erklären kann man sich dies folgendermaßen: Betrachten wir die Werte a für die Funktion $x^5 - x + a$, an der Nullstelle $b_0 + \varepsilon$, wobei ε eine betragsmäßig sehr kleine komplexe Zahl ist.

$$\begin{gathered} a = (b_0 + \varepsilon) - (b_0 + \varepsilon)^5 \Leftrightarrow \\ a = b_0 - b_0^5 + \varepsilon(1 - 5b_0^4) - \varepsilon^2(10b_0^3 + 10\varepsilon b_0^2 + 5\varepsilon^2 b_0 + \varepsilon^3) \Leftrightarrow \\ a = a_0 - \varepsilon^2(10b_0^3 + 10\varepsilon b_0^2 + 5\varepsilon^2 b_0 + \varepsilon^3) \Leftrightarrow \\ a \approx a_0 - 10b_0^3\varepsilon^2 \end{gathered}$$

(Es wurden die Tatsachen verwendet, dass $b_0 - b_0^5 = a_0$ und $1 - 5b_0^4 = 0$)
Aufgrund dieser Berechnung können wir erkennen, dass a in der Nähe von a_0 eine volle Umdrehung um a_0 macht. In Abbildung 2 sehen wir, dass die Nullstellen x_4 und x_5 jedoch nur eine halbe Drehung um den Punkt b_0 machen. Somit tauschen die beiden Nullstellen x_4 und x_5 ihre Position.

Weiters können wir aus der Abbildung 2 erkennen, dass wenn wir a durch ia ersetzen, das Gleiche entlang der positiven Imaginärachse geschieht.

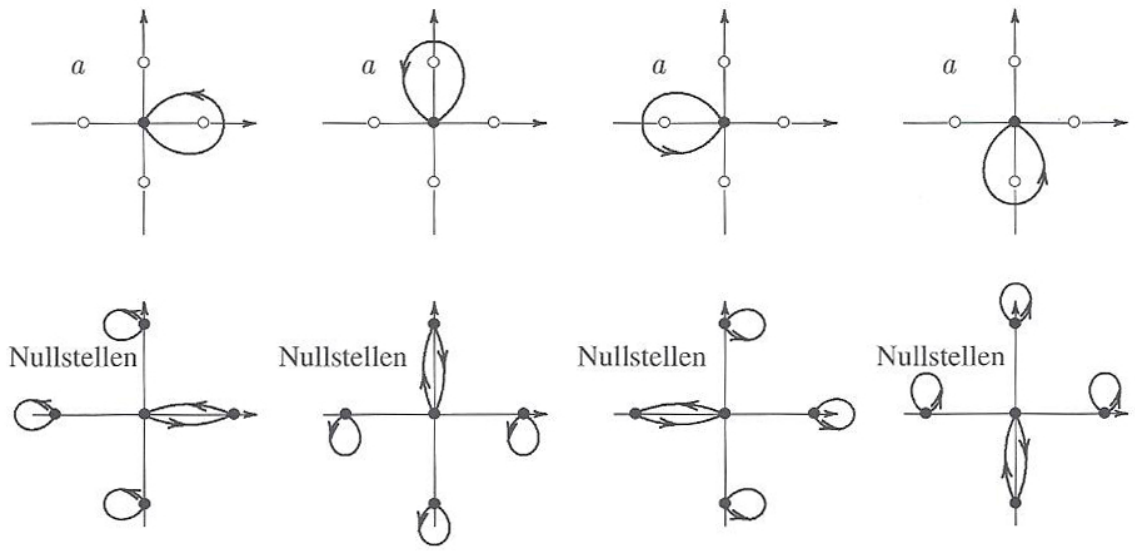

Abbildung 3: Schleifen von a und induzierte Permutationen der Nullstellen

Eine Verknüpfung zweier Schleifen (das heißt eine Schleife, die zuerst die erste Schleife durchläuft und anschließend die zweite) führt auf eine Permutation der Nullstellen, die das Produkt, der zu den beiden Schleifen gehörenden Permutation ist. Abbildung 3 zeigt uns die verschiedenen Schleifen von a entlang der Achsen und die dadurch induzierte Permutation der Nullstellen.

Satz 6.1. *Zu jeder Permutation der fünf Nullstellen* $0, \pm 1, \pm i$ *existiert eine Schleife, die bei* 0 *beginnt, bei* 0 *endet und die (gefährlichen) Punkte* $\pm\frac{4}{5\sqrt[4]{5}}, \pm\frac{4i}{5\sqrt[4]{5}}$ *umgeht, die zu dieser Permutation führen.*

Beweis: Wir nummerieren die Nullstellen folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 1 &\widehat{=} 1 \\ 2 &\widehat{=} i \\ 3 &\widehat{=} -1 \\ 4 &\widehat{=} -i \\ 5 &\widehat{=} 0 \end{aligned}$$

Sei $a > 0$ eine „fast reelle “Zahl (mit fast reell ist gemeint bis auf die Umrundung von a_0 wo wir in die komplexen Zahlen ausweichen müssen) dann entspricht:

die Schleife $a \to a_0$ der Permutation(52341)
die Schleife $ai \to a_0 i$ der Permutation(15342)
die Schleife $-a \to -a_0$ der Permutation(12543)
die Schleife $-ai \to -a_0 i$ der Permutation(12354)

Nach Satz 5.1 können wir eine Schleife finden die jedes beliebige Produkt dieser Permutationen induziert. q.e.d.

7 Änderungen von a und Permutationen von Zwischenwurzeln

Angenommen unsere Gleichung $x^5 - x + a = 0$ ist durch Wurzelausdrücke lösbar, dann sind diese natürlich von a abhängig. Das Ganze sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} &x_1^{k_1} = p_1(a), \\ &x_2^{k_2} = p_2(a, x_1), \\ &\vdots \\ &x_N^{k_N} = p_N(a, x_1, \ldots, x_{N-1}) \end{aligned}$$

Wie man erkennen kann, hat die Gleichung $x_1^{k_1} = p_1(a)$ für $p_1(a) \neq 0$ k_1 verschiedene Lösungen, für $p_1(a) = 0$ jedoch nur eine $(x_1 = 0)$. Die Lösungen sind die Nullstellen des Polynoms p_1, da aber ein Polynom nur endlich viele Nullstellen hat, können wir die Werte von a für die $x_1 = 0$ bedenkenlos als gefährliche Punkte deklarieren. Dieselbe Überlegung gilt auch für $x_2^{k_2} = p_2(a, x_1)$ und somit auch für die restlichen $x_t^{k_t} = p_t(a, x_1, \ldots, x_{t-1})$, $(t \in \{3, \ldots, N\})$. Ein weiterer Zusamenfall der Lösungen kommt vor, wenn für zwei Lösungen $x_1, x_1^{'}$ gilt, dass:

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x_1^{'})$$

In diesem Fall würde x_2 zumindest wieder eine doppelte Lösung haben, doch genau das wollen wir vermeiden, also deklarieren wir den zugehörigen a-Wert wieder als gefährlichen Punkt. Anders ausgedrückt:

Das Gleichungssystem,

$$\begin{cases} x_1^{k_1} = p_1(a) \\ (x_1^{'})^{k_1} = p_1(a) \\ p_2(a, x_1) = p_2(a, x_1^{'}) \end{cases}$$

hat entweder endlich viele Lösungen $(a, x_1, x_1^{'})$, - in diesem Fall deklarieren wir die zugehörigen Werte von a als gefährliche Punkte- , oder es hat Lösungen für alle a. Wir gehen weiter so fort und kommen dann auf eine endliche Menge von gefährlichen Punkten.

Definition 7.1. *Sei $x^5 - x + b$ eine Polynomfunktion deren Nullstellen die Vielfachheit 1 besitzen. Wenn für die Polynomfunktion $x^5 - x + b + c, a := b + c$ gilt, dass die Vielfachheit ihrer Nullstellen > 1 ist. So nennen wir a einen gefährlichen Punkt.*

8 Kommutatoren von Schleifen

Seien ℓ_1,ℓ_2 zwei Schleifen in der Ebene a. Der Kommutator der Schleifen $[\ell_1,\ell_2] = \ell_1\ell_2\ell_1^{-1}\ \ell_2^{-1}$, die zuerst Schleife ℓ_1, dann ℓ_2, dann ℓ_1 in umgekehrter Richtung und schließlich ℓ_2 in umgekehrter Richtung durchläuft. Diese Schleife wird als Kommutator der Schleifen ℓ_1 und ℓ_2 bezeichnet.

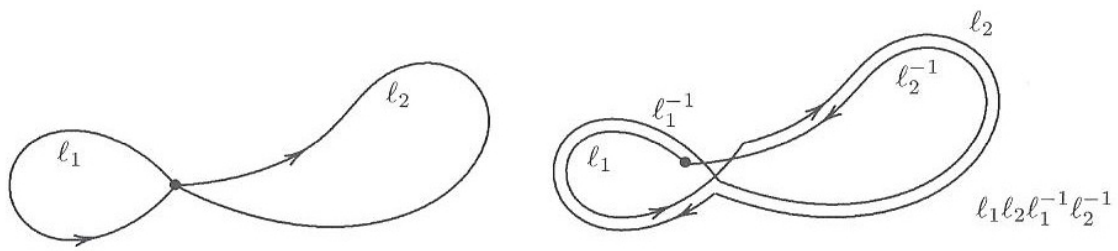

Abbildung 4: li. Schleifen in der Ebene a re. Kommutator der beiden Schleifen

Lemma 8.1. *Ist eine Schleife ℓ, in der Ebene von a ein Produkt von Kommutatoren von Schleifen (die gefährliche Punkte umgehen), so kehrt jeder Wert von x_1 (der Gleichung $x_1^{k_1} = p_1(a)$) nach Änderung von a entlang ℓ zu seinem Ausgangspunkt zurück.*

Beweis: Unser x_1 können wir schreiben als: $x_1 = \sqrt[k_1]{p_1(a)}$, also sind die k_1 verschiedenen Lösungen für jeden (nicht gefährlichen) Wert von a nach Satz 2.4:

$$x_1\ ,\ x_1\epsilon_{k_1},\ x_1\epsilon_{k_1}^2,\ \ldots,\ x_1\epsilon_{k_1}^{k_1-1}$$

wobei $\epsilon = \cos\frac{2\pi}{k_1} + i\sin\frac{2\pi}{k_1}$ ist. Sei $\ell = \ell_1\ell_2\ell_1^{-1}\ \ell_2^{-1}$. Die Änderung von a entlang ℓ_1 soll x_1 in $x_1\epsilon_{k_1}^{m_1}$ „überführen"(auch die anderen Lösungen $x_1\epsilon_{k_1}^{r}$ gehen über in $x_1\epsilon_{k_1}^{r+m_1}$). Die Änderung von a entlang ℓ_2 soll x_1 in $x_1\epsilon_{k_1}^{m_2}$ „überführen". Die Hintereinanderausführung vonℓ_1,ℓ_2,ℓ_1^{-1}, ℓ_2^{-1} sieht folgendermaßen aus:

$$x_1 \mapsto x_1\epsilon_{k_1}^{m_1} \mapsto x_1\epsilon_{k_1}^{m_1+m_2} \mapsto x_1\epsilon_{k_1}^{m_1+m_2-m_1} \mapsto x_1\epsilon_{k_1}^{m_1+m_2-m_1-m_2} = x_1$$

Aufgrund dessen, überführt die Änderung von a entlang eines Kommutators von Schleifen jeden Wert von x_1 in sich selbst und dasselbe gilt dann natürlich für ein Produkt von Kommutatoren. q.e.d.

Lemma 8.2. *Ist eine Schleife ℓ in der Ebene von a ein Produkt von Kommutatoren von Produkten von Kommutatoren von Schleifen (die die gefährlichen Punkte umgehen), so kehrt jeder Wert von x_1 und x_2 nach Änderung von a entlang ℓ zu seinem Ausgangspunkt zurück.*

Beweis: Sei ℓ ein Kommutator von Schleifen ℓ_1, ℓ_2, die selber Produkte von Kommutatoren sind. So überführt nach Lemma 8.1 jede Änderung von a entlang jeder der Schleifen ℓ_1, ℓ_2 x_1 in sich selbst. Wegen

$$x_2^{k_2} = p_2(a, x_1)$$

muss es für irgendein m in $x_2\epsilon_{k_2}^{m}$ „überführt"werden, also auch $x_2\epsilon_{k_2}^{r}$ in $x_2\epsilon_{k_2}^{r+m}$. Daher transformieren die aufeinanderfolgenden Änderungen entlang der Schleifenℓ_1,ℓ_2,ℓ_1^{-1}, ℓ_2^{-1} den Wert x_2. Dies sieht wieder folgendermaßen aus:

$$x_2 \mapsto x_2\epsilon_{k_2}^{m} \mapsto x_2\epsilon_{k_2}^{m+m_2} \mapsto x_2\epsilon_{k_2}^{m+m_2-m} \mapsto x_2\epsilon_{k_2}^{m+m_2-m-m_2} = x_2$$

Also überführt die Änderung von a entlang des Kommutators von Produkten von Kommutatoren von Schleifen, die die gefährlichen Punkte umgehen, jeden Wert x_2 (sowie jeden Wert von x_1) in sich selbst. q.e.d.

Wir können nun auf die gleiche Art folgendes Lemma beweisen:

Lemma 8.3. *Ist ℓ eine Schleife*

$$N\begin{cases} \textit{ein Produkt von Kommutatoren von} \\ \textit{Produkten von Kommutatoren von} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \textit{Produkten von Kommutatoren von} \end{cases}$$

Schleifen (die die gefährlichen Punkte umgehen), so überführt die Änderung von a entlang ℓ alle Werte $x_1, \dots, x_N$ in ihre Ausgangswerte.

9 Beweis des Hauptsatzes

Satz 9.1. *Die Gleichung*

$$x^5 - x + a = 0$$

ist nicht durch Wurzelausdrücke lösbar.

Beweis: Wir nehmen an, dass die Gleichung durch Wurzelausdrücke lösbar ist. Wir halten eine nicht identische gerade Permutation von α_0 von Nullstellen fest. Wir stellen α_0 als ein Produkt von Kommutatoren gerader Permutationen dar

$$\alpha_0 = [\alpha_1, \alpha_2] \cdots [\alpha_{2s-1}, \alpha_{2s}] \,.$$

Anschließend stellen wir jede Permutation α_i als ein Produkt von Kommutatoren gerader Permutationen dar

$$\alpha_1 = [\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}] \cdots [\alpha_{1,2t-1}, \alpha_{2t}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Das machen wir N mal. Zu jeder Permutation $\alpha_{i_{1,\ldots,N}}$ die im letzten, N-ten Schritt vorkommt, bestimmen wir eine Schleife $\ell_{i_{1,\ldots,N}}$, die alle gefährlichen Werte von a umgeht, die diese Permutation induziert. Im Ausdruck für α_0 ersetzen wir jede Permutation $\alpha_{i_{1,\ldots,N}}$ durch die entsprechende Schleife $\ell_{i_{1,\ldots,N}}$. Wir erhalten eine Schleife, die ein N-faches Produkt von Kommutatoren von Schleifen ist. Einerseits überführt diese Schleife nach Lemma 8.3 jeden Wert von x_N in seinen Ausgangswert, andererseits induziert diese Schleife die (nicht identischen) Permutationen von α_0, bei der die Nullstellen nicht wieder zu ihrem Ausgangswert zurückgehen. Somit ist dies ein Widerspruch und die Gleichung ist nicht durch Wurzelausdrücke lösbar. q.e.d.

10 Résumé

In dieser Arbeit wurde somit bewiesen, dass eine Gleichung fünften Grades im Allgemeinen nicht durch Wurzelausdrücke lösbar ist. Es gibt allerdings einige Fälle (wie $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$) in denen eine Gleichung 5. Grades sehr wohl durch Wurzelausdrücke gelöst werden kann. Der französische Mathematiker Évarist Galois entdeckte Anfang des 19. Jahrhunderts eine Methode mit der man bestimmen konnte, ob eine gegebene Gleichung (n-ten Grades) durch Wurzelausdrücke lösbar ist oder nicht. (genaueres darüber: Siehe Galoistheorie).
Obwohl in der gesamten Arbeit nur ein Satz bewiesen wurde, ist dieser Beweis und die damit verbundene Vorbereitung sehr komplex und eher nicht für den Schulgebrauch geeignet.