Papierbogengeometrie

Seminararbeit

eingereicht am

Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen
der
Karl-Franzens-Uni Graz

Verfasser: Tina Schmid, Ursula Kabusch
Betreuer: Univ.-Prof. Dr.phil. Karin Baur

Inhaltsverzeichnis

1 Abwickelbare Flächen

1.1 Papierbogenflächen

Wenn man einen Bogen Papier zur Hand nimmt und versucht diesen zu verformen erhält man natürlich als Ergebnis eine verformte Fläche, wie beispielsweise in **Abb. 1.1**. Jedoch kann nicht jede beliebige Fläche durch die Verformung dargestellt werden.

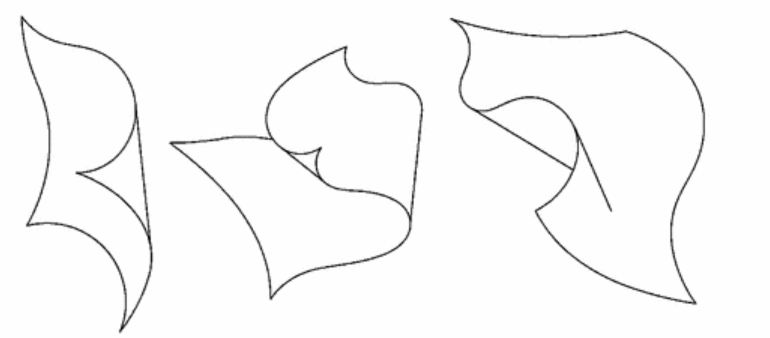

Abbildung 1.1: Papierbogenfläche

Versucht man beispielsweise eine Kugel zu formen, stellt man sehr schnell fest, dass dies unmöglich, wenn man keine Falten als Resultat erhalten möchte, während ein Kegel oder ein Zylinder relativ einfach zu formen sind. Solche Flächen, die aus einem Papierbogen formbar sind, heißen in der Geometrie abwickelbar. Als Synonym für abwickelbar gilt verbiegbar.

1.2 Definition

Ein Flächenstück φ heißt abwickelbar, wenn es eine globale, Invektive Abbildung von φ in die Ebene E $f : \varphi \rightarrow E$, sodass jeder Kurve $c \subseteq \varphi$ eine gleichlange Kurve in E zugeordnet wird. Eine Fläche heißt abwickelbar, wenn sie die Vereinigungsmenge abwickelbarer Flächestücke ist.

1.3 Eigenschaften von abwickelbaren Flächen

In der Definition der Abwicklung ist bereits erkennbar, dass das wichtigste Merkmal die bogenlängetreue Abbildung einer Kurve von Bedeutung ist. Aus der Längentreue lassen sich die Winkeltreue und die Flächentreue folgern. Einen exakten Beweis hierfür gibt es in der Differentialgeometrie, die wir hier nicht näher betrachten möchten. Bewiesen hat diese Eigenschaften jedoch ein nennenswerter Mann, nämlich Euler. Der Schnittwinkel zweier Kurven oder Oberflächen ist als Folge der Winkeltreue invariant. Das heißt, dass irgendwelche zwei sich schneidende Kurven in zwei andere Kurven übergehen, die sich unter demselben Winkel schneiden. Dass die Abwicklung geradentreu ist, sieht man bei genauerer Betrachtung ein. Mathematisch formuliert ist das eine Gerade der Fläche φ, die in eine Gerade der Verebnung übergeht. Die Umkehrung dieser Behauptung gilt allerdings nicht. Die einfachsten Beispiele dafür sind das Drehhyperboloid und die Wendelfläche. Wenn man anstatt einer Geraden eine beliebige Kurve durch den Raum wandern lässt, so ist die einhüllende Fläche komplizierter.

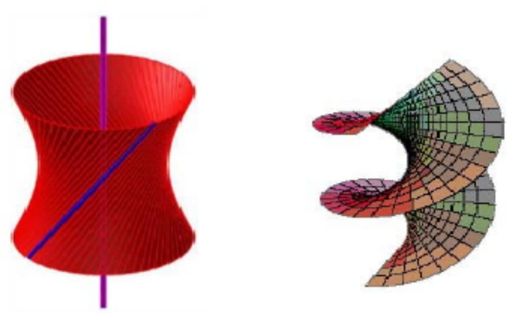

Abbildung 1.2: Beispiele für nicht abwickelbare Flächen

Satz 1

Sei $f : \varphi \to E$, eine Invektive Abbildung und seien g und e zwei sich schneidende Strecken, die den Winkel α einschließen.

Ist φ abwickelbar, dann ist $\sphericalangle(g,e) = \sphericalangle(f(g),f(e))$. *Winkeltreue*

Zwei Eigenschaften lassen sich bereits alleine dadurch beobachten, indem man die Eigenschaften des

Papiers, wie in Punkt 1.1, betrachtet. Alle auf dem Papier gezeichneten Kurven behalten auch unter der Verformung ihre Länge, das bedeutet Längentreue. Zum anderen bedeutet, dass die Fläche glatt bleibt, dass die Fläche in jedem Punkt eine Tangentialebene besitzt. Im Resümee können wir also über folgende Eigenschaften einer Abwicklung sprechen:

- Längentreue
- Flächentreue
- Winkeltreue
- Geradentreue

Satz 2

Sei $f : \varphi \to E$, eine Invektive Abbildung und sei A ein Flächenstück der Ebene. Ist φ abwickelbar, dann ist $A = f(A)$. *Flächentreue*

2 Geradlinige Flächen und Abwickelbare Flächen

2.1 Jede abwickelbare Fläche ist geradlinig

Satz 3

Jede abwickelbare Fläche ist geradlinig!

Als geradlinige Flächen bezeichnet man sogenannte Regelflächen. Das sind Flächen, auf denen man durch jeden Punkt eine Gerade ziehen kann, die ganz auf der Fläche liegt. Das heißt, wiederum, dass die geradlinige Fläche durch Bewegung der Geraden erzeugt werden kann. Die verschiedenen Lagen, die die Geraden einnehmen, nennt man die Erzeugenden der Fläche. „Bewegt sich die erzeugende Geraden so, dass jede ihrer Lagen mit der als nächstes folgenden Lage in einer Ebene liegt, oder dass jede ihrer Lagen die nächstfolgende schneidet, was eigentlich dasselbe ist, so gehört das zwischen diesen beiden Lagen enthaltene, unendlich kleine Ebenenstück der erzeugten Fläche an. Wenn man nun diese Flächenstücke unendlich kleinen Drehungen um die aufeinander folgenden Erzeugenden unterwirft, kann man alle diese Flächenstücke und somit auch die ganze Fläche auf eine Ebene ausbreiten oder abwickeln. Daher kommt die Bezeichnung der Fläche als abwickelbar.“ (HUSTY 2002)

Vereinfacht gesagt heißt das, dass zu jedem Punkt einer abwickelbaren Fläche ein Intervall existiert, welches zur Fläche gehört. Der Punkt befindet sich dabei innerhalb des Intervalls. Werden formale Aspekte vernachlässigt, kann man einen Vergleich mit einer Fahrradspeiche ziehen, die so angelegt werden kann, dass zu beiden Seiten von A ein Teil der Speiche das Papier berührt **Abb. 2.1**.

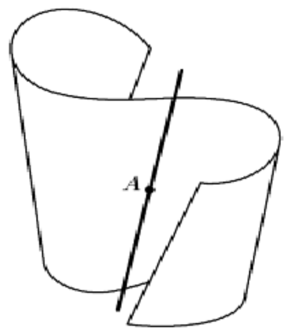

Abbildung 2.1: Eine Regelgerade

Wenn ein Punkt der Fläche zu zwei verschiedenen geradlinigen Intervallen gehört, dann ist ein Teil der Fläche um den Punkt eben. Diese Möglichkeit schließen wir in dieser Bearbeitung jedoch aus, was wiederum impliziert, dass es zu jedem Punkt der Fläche eine eindeutig bestimmte Gerade gibt, die auf der Fläche liegt und durch diesen Punkt verläuft. Möglich ist die Annahme, dass die Fläche nicht eben ist, da es keine realen unendlichen Papierbögen gibt, die keine Ränder besitzen. Daraus ergibt sich die Eindeutigkeit des geradlinigen Intervalls, das sich von Rand zu Rand bewegt. So bildet sich aus den geradlinigen Intervallen eine stetige Schar über die ganze Fläche.

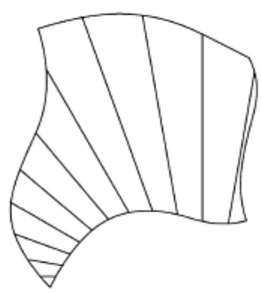

Abbildung 2.2: Schar von Regelgeraden

2.2 Unterschiede zwischen geradlinigen und abwickelbaren Flächen!?

Eines können wir mit guten Gewissen behaupten, nämlich dass Regelflächen viel häufiger sind als abwickelbare Flächen. Außerdem sind doppelt geradlinige Flächen nicht abwickelbar. (Verweis auf Kapitel 16: Schaubild der Mathematik) Nun ein Beispiel: „Sei eine beliebige Regelfläche S und eine Gerade g auf S gegeben. Wir betrachten die Tangentialebene TA an S in einem Punkt A von g. Diese Ebene enthält g, die Ebene TA wird allerdings in der Regel für verschiedene Punkte A von g verschieden sein. Das heißt: Schieben wir den Punkt A entlang von g, so dreht sich die Ebene

TA um g. Handelt es sich bei S beispielsweise um ein einschaliges Hyperboloid (siehe Abbildung 4), so erhält TA neben g die Gerade der zweiten Erzeugendenschar, wie im Vortrag über „Gerade und gekrümmte Flächen (Kapitel 16)“ bereits erwähnt. Folglich unterscheiden sich diese Ebenen für verschiedene Punkte A. Bewegt sich A entlang von g, so vollführt TA fast eine halbe Drehung um g. So etwas passiert auf einer abwickelbaren Fläche allerdings nie. Alle Tangentialebenen an einer abwickelbare Fläche S in den Punkten auf einer geraden Linie dieser Fläche, fallen zusammen.“ (FUCHS, TABACHNIKOV 2010)

Man kann auch sagen, dass man an einer abwickelbaren Fläche nicht nur eine Fahrradspeiche, sondern auch ein Lineal anlegen kann. Das ist eine hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit einer Regelfläche.

2.3 Fortsetzung der Linien abwickelbarer Flächen

Setzt man die Linien der **Abb. 2.2**. nach außen hin fort, wird die Fläche größer und die Krümmung nimmt ab, sodass sich die Fläche einer Ebene stetig annähert.

Setzt man die Linien der Abbildung nach innen hin fort, also in die entgegengesetzte Richtung konvergieren die Linien. Sie konvergieren jedoch nicht in einem Punkt. Sie sind vermutlich paarweise windschief, was zur Folge hat, dass sie zuerst konvergieren und danach divergieren, wobei die Fläche, die die divergenten Linien bilden, an ein Hyperboloid erinnern, welches nicht zu den abwickelbaren Flächen gehört. Könnte diese Vermutung stimmen?

Es kommt zur Entwicklung einer sogenannten scharfen Kante, dass bedeutet dass die Fläche nicht glatt bleibt, sondern gefaltet wird. Der Schnitt der Fläche mit einer Ebene, die senkrecht zu dieser Kurve ist, sieht wie eine semikubische Parabel aus, wie in Abbildung 6 gezeigt. Die scharfe Kante wird auch als Rückkehrkante bezeichnet.

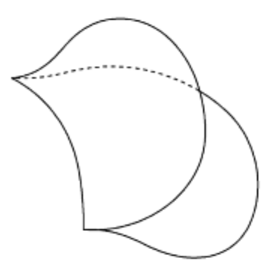

Abbildung 2.3: Die Rückkehrkante

3 Die Rückkehrkante

3.1 Existenz der Rückkehrkante

Die Existenz wird aufgrund ihrer Komplexität in diesem Rahmen nicht bewiesen. Wir unternehmen jedoch den Versuch einer Erklärung. In der **Abb. 3.1**. ist die Rückkehrkante gut zu erkennen.

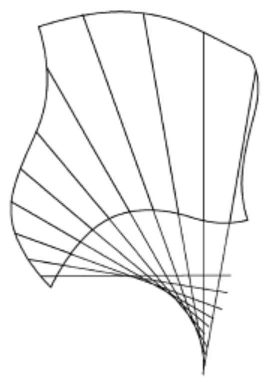

Abbildung 3.1: Einhüllende der Regelgeraden

Die Kurve, genauer gesagt die seitliche Hyperbel vermittelt uns den Eindruck, als ob alle Geraden auf dem Hyperboloid tangential sind. In Wirklichkeit ist aber nichts davon in der Abbildung 8 tangential, da es sich um eine Projektion in 2D handelt und in der Ebene diese Annahme nicht zutrifft. Nun stellt sich die Frage: Warum hat man diesen Eindruck?

Die Tangentialebene an das Hyperboloid im Punkt der seitlichen Hyperbel steht senkrecht zur Zeichenebene und ihre Projektionen sind Linien. Aufgrund der Definition der abwickelbaren Flächen ist das somit keine. In Wirklichkeit stehen die Linien, die nicht zur Rückkehrkante gehören jedoch nicht senkrecht zur Zeichenebene. Die Tangentialebene ist aber für alle Punkte der Linie gleich. Das impliziert, dass sie in den Berührungspunkten mit der Kante nicht senkrecht auf die Zeichenebene steht.

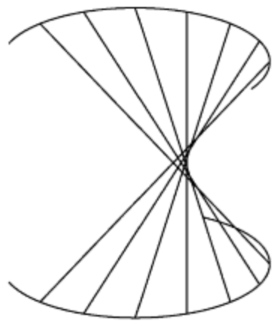

Abbildung 3.2: Tangentialebene des Hyperboloids (senkrecht zur Zeichnung)

Fazit: Unsere Tangentialebene sieht, wie angenommen aus **Abb. 3.3.**, was wiederum beweist, dass die Rückkehrkante tatsächlich zu den Regelgeraden auf der Fläche tangential ist.

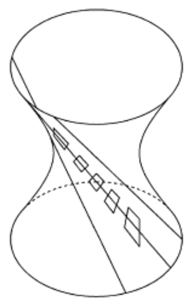

Abbildung 3.3: Tangentialebene

4 Von der Rückkehrkante zur abwickelbaren Fläche

Nun betrachten wir die Konstruktion aus der Gegenrichtung. Wir gehen nicht mehr von der Fläche aus, um zu unserer Rückkehrkante zu kommen, sondern wir starten umgekehrt und unser Ziel ist daher, eine beliebige, nirgends ebene, abwickelbare Fläche zu konstruieren. Dies ist überhaupt möglich, weil unsere Fläche ja aus Geraden besteht, die tangential an die Rückkehrkante liegen. Den Ausgangspunkt bildet also eine räumliche Kurve, die Rückkehrkante, und wir betrachten alle Tangenten an diese Kurve, die eine Fläche beschrieben. Diese Fläche ist nun unsere gewünschte abwickelbare Fläche mit der Rückkehrkante als Ausgangspunkt.

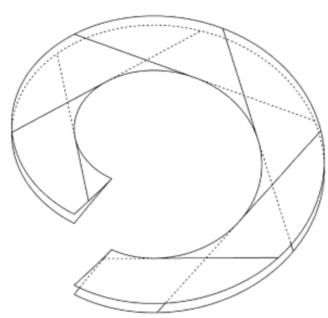

Abbildung 4.1: Fläche, die von Tangenten an die Schreublinie gebildet wird

„Entsprechend ist die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte, in denen die bewegliche Ebene die Leitflächen berührt, eine Erzeugende der abwickelbaren Fläche. Diese berührt die Leitflächen je längs einer Kurve. Anstelle von Leitflächen könne auch Raumkurven oder eben Kurven treten. Dem entspricht die Erzeugung einer Raumkurve als Durchdringung von abwickelbaren Flächen. Jede Hülleben der abwickelbaren Fläche enthält die bezüglichen Tangenten der Leitkurve.“ (Rohn, 1896)

Aber nicht jede beliebige Fläche kann auf diese Weise konstruiert werden. Es gibt zwei Ausnahmen, wo das nicht möglich ist.

Einerseits funktioniert es nicht, wenn die Fläche zylindrisch ist, denn dann sind alle Linien darauf parallel und es existiert keine Rückkehrkante. Andererseits gelingt es auch nicht mit einer konischen Fläche, denn hier verlaufen alle Linien durch einen Punkt.

Aber ein zufällig verformter Papierbogen besteht immer aus Tangenten an eine unsichtbare Rückkehrkante.

Fazit: Eine beliebige, nicht eben Kurve ist eine Rückkehrkante der Fläche, die ihre Tangenten bilden.

Wir haben nun gezeigt, dass eine abwickelbare Fläche auf eine eindeutige Rückkehrkante führt, und dass man durch ausgehend von der Rückkehrkante wieder auf die eindeutige abwickelbare Fläche kommt.

4.1 Ist die Rückkehrkante glatt?

Ein weiterer Punkt, den wir zu analysieren haben, ist Frage, ob die Rückkehrkante eine glatte Kurve ist oder nicht.

Eine glatte Kurve ist im Allgemeinen eine stetig differenzierbare Kurve, deren Ableitung nicht verschwindet, das heißt die Kurve hat keine Ecken oder Wendungen.

Definition

Sei K eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ mit der Parameterdarstellung $f : t \rightarrow (f_1(t),\ldots,f_n(t))$. K heißt glatt, wenn f_i für $i = 1,\ldots,n$ auf [a,b] stetig differenzierter sind und $(f_1'(t),\ldots,f_n'(t)) \neq (0,\ldots 0)$ für alle $t \in [a,b]$ gilt.

Satz 4

Eine Rückkehrkante ist nicht glatt.

<u>Beweisidee</u>:

Wir stellen uns gerade Linien auf einem Papierbogen vor, welche tangential an die Rückkehrkante liegen. Der Abstand zwischen ihnen und dem Berührungspunkt nimmt schnell ab oder zu. Nur was passiert dazwischen?

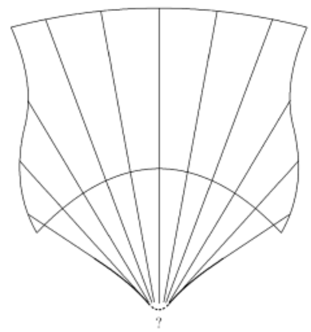

Abbildung 4.2: Was befindet sich zwischen den zwei Segmenten der Rückkehrkante?

Verlängert man die einzelnen Linien erkennt man, dass die Rückkehrkante nicht glatt sein kann, denn die Kurve kann nicht tangential zu allen geraden Linien sein.

„Es wurde früher bemerkt, dass die Raumkurve, deren Tangenten die abwicklebare Fläche bilden, eine Rückkehrkurve dieser Fläche ist, dass also jeder Schnitt dort, wo diese Kurve verläuft, Spitzen aufweist.“ (Rohn, 1896) Fazit: Die Rückkehrkante muss in einigen Punkten Spitzen haben.

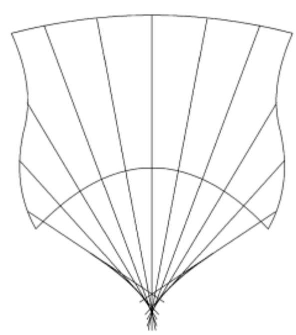

Abbildung 4.3: Die Rückkehrkante hat eine Spitze

4.2 Schwalbenschwänze

Nun sind wir an der Frage interessiert, wie die Fläche in der Umgebung einer solchen Spitze der Rückkehrkante aussieht. Betrachtet man diese genauer, lässt sich die Ähnlichkeit zu einem Schwalbenschwanz erkennen.

Diese Annahme wollen wir nun versuchen zu begründen.
Die Fläche eines Schwalbenschwanzes hat neben der Rückkehrkante auch eine Selbstschnittkurve. In

der folgenden Abbildung sehen wir links eine Schar von Regelgeraden auf der Fläche und rechts einige ebene Schnitte.

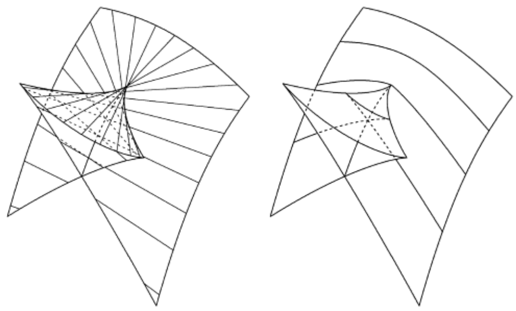

Abbildung 4.4: Schwalbenschwanz

Bei der geometrischen Deutung der Fläche erkennt man, dass der Schwalbenschwanz von drei Parabeln beschrieben wird, nämlich von einer Halbparabel und zwei semikubischen Parabeln. Somit entsteht im Nullpunkt ein von drei Faltenflächen eingegrenzter, innerer Raum, der eigentliche Schwalbenschwanz.

Er ist nach unten durch Linien mit Kuspen bzw. Antikuspenpunkten begrenzt. Oben liegt eine Linie, an der sich die beiden Faltenflächen schneiden.

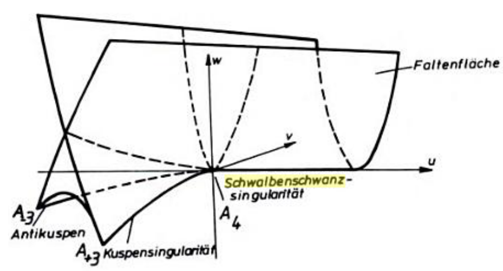

Abbildung 4.5: Deutung des Schwalbenschwanzes

Wie schon im vorigen Abschnitt gehen wir von einer Rückkehrkante aus und entwickeln die gewünschte Fläche als Vereinigung aller Tangenten.

Anfangs wird wieder eine räumliche Kurve mit einer Spitze gebraucht. Dafür verwenden wir eine semikubische Parabel, die durch folgende parametrisierte Gleichung beschrieben wird:

$x = at^2$,$y = bt^3$,$z = ct^4$

Jetzt zeichnen wir ihre Tangenten und erkennen, dass jede Tangente durch den Berührungspunkt und dem Schnittpunkt der Symmetrielinie der Parabel in drei Abschnitte gegliedert wird.

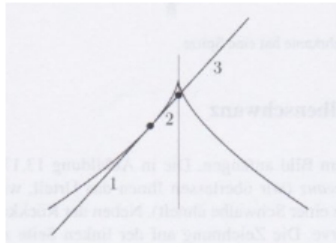

Abbildung 4.6: Tangenten an eine semikubische Parabel

Nun betrachten wir den ersten, zweiten und dritten Teil jeder Tangente extra.
Die Abbildung a) zeigt einen Teil der Fläche zwischen den Zweigen der Rückkehrkante, b) veranschaulicht die beiden Teile des Schwalbenschwanzes der Selbstschnittkurve und c) illustriert den restlichen Teil der Fläche.

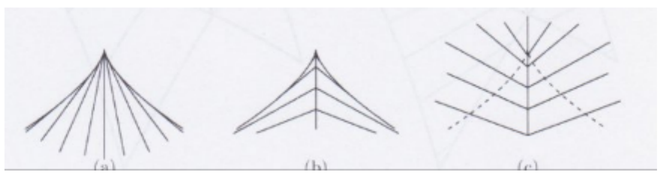

Abbildung 4.7: Teilabschnitte des Schwalbenschwanzes

Fazit: Eine Fläche, die sich aus der endlichen Fortsetzung eines zufällig verformten Papierbogens ergibt, hat eine Rückkehrkante mit Spitzen.

4.2.1 Schwalbenschwänze gibt es überall

Weiteres ist zu erwähnen, dass es nicht nur in der ebenen Geometrie Spitzen gibt, sondern auch im Raum gibt es überall Schwalbenschwänze.
Wie in bereits vorgetragenen Präsentationen erklärt, führen die räumlichen Konstruktionen von Körpern auf Flächen mit Schwalbenschwänzen. Um das zu veranschaulichen, denken wir zum Beispiel an ein Ellipsoid. Darauf bilden wir eine Normale und entlang dieser lassen wir jeden Punkt ins Innere des Ellipsoids wandern. Die so entstehende Fläche bildet in einem gewissen Moment Rückkehrkante und Schwalbenschwänze aus.

Ein weiterer Aspekt, den wir in Verbindung mit Schwalbenschwänzen bringen können, ist die Lösung von Gleichungen. Sucht man nämlich die Anzahl der reellen Lösungen der Gleichung

$x^4 + px^2 + qx + r = 0$

so kann man einen Schwalbenschwanz mit den Koordinaten p,q,$r$im Raum betrachten.

Die Rückkehrkante dieses Schwalbenschwanzes müsste dann

$p = -6t^2$,$q = 8t^3$,$r = -3t^4$sein. Betrachten wir wieder unseren Schwalbenschwanz, so fällt auf, dass sich die Lösungen dieser Gleichung wie folgt verteilen:

- Im Inneren der dreieckigen Tasche gibt es Punkte (p,q,r), für die die Gleichung vier reelle Lösungen besitzt.
- Über dieser Fläche gibt es Punkte (p,q,r), die zu Gleichungen mit zwei reellen Lösungen gehören.
- Unter dieser Fläche gibt es Gleichungen, die keine reelle Lösung besitzen.
- Auf der Fläche außerhalb des Randes der Tasche (c) gibt es eine doppelte reelle Lösung und ein Paar konjugiert komplexer Lösungen.
- Auf dem Rand der Tasche gibt es drei reelle Lösungen – eine doppelte und zwei einfache Lösungen.
- Auf der Rückkehrkante gibt es zwei Nullstellen, eine dreifache und eine einfache Nullstelle.
- Auf der Selbstschnittkurve gibt es zwei Paare doppelter Nullstellen.

Techmath5.pdf

5 Quellen

- Mayers großes Konversations-Lexikon (1907): Geradlinige Flächen. http://www.zeno.org/Meyers-1905/A/Geradlinige+Fl

Husty/
Techmath5.pdf

- Husty: Abwicklung von Flächen. http://techmath.uibk.ac.at/geometrie/institutsangehoerige/Husty/TechM (Entnahme: 12.Juni 2013)

- Fuchs, Tabachnikov (2010): Schaubild der Mathematik. Springerverlag Berlin

- Ordinariat für Geometrie (2013): Gekrümmte Flächen. http://sodwana.uni-ak.ac.at/geom/mitarbeiter/files (Entnahme: 12.Juni 2013)

.../files/dgla4.pdf