Geraden auf gekrümmten Flächen

Elisabeth Rottensteiner (0811402) und Christian Bischof (0711206)

Juni 2013

1 Über Flächen und Regelflächen

Gibt es Flächen, die eine Gerade enthalten, obwohl sie auch noch so gekrümmt scheinen? Nach unseren intensiven Vorbereitungen auf den Seminarvortrag können wir diese Frage mit einem klaren „Ja“ beantworten. Wir wollen uns in unserer Seminararbeit nicht nur mit Flächen beschäftigen, die eine Gerade enthalten, wir werden Ihnen sogar Flächen mit sehr vielen Geraden vorstellen.

Doch zu aller erst müssen wir überhaupt definieren, was eine Fläche ist, da wir die Definition später für die Beweise unserer Sätze brauchen:

Definition 1. *Eine Menge S im Raum heißt Fläche, wenn zu jedem Punkt A in S eine Ebene P und eine positive Zahl r existiert, sodass der Schnitt von S mit einer beliebigen Kugel vom Radius $< r$ um A eindeutige Projektionen auf die Ebene P hat.*

So sind z.B. Ebenen, Sphären, Zylinder, Paraboloide usw. Flächen.
Wie schon erwähnt, werden wir uns im Speziellen Flächen widmen, die Geraden enthalten. Dazu benötigen wir folgende Definition einer linierten Fläche (Regelfläche):

Definition 2. *Eine Fläche S heißt liniert (Regelfläche), wenn zu jedem Punkt A in S eine Gerade l durch A existiert, die auf S liegt. Diese Gerade l wird auch eine Erzeugende genannt.*

Der Begriff Regelfläche kam aus einer Falschübersetzung des englischen Begriffs „ruled surface“ zustande, da „rule“ nicht nur „Regel“, sondern auch „linieren“ heißt (vgl. Wikipedia).
Einfache Regelflächen kommen z.B. bei der Ebene und beim Zylinder vor, wo die Regelgeraden sehr leicht zu erkennen sind. Diese Regelfläche heißen einfach gekrümmt oder torsal. Sie sind für unsere Arbeit aber uninteressant.
Wir werden uns vor allem mit windschiefen Regelflächen beschäftigen, wie sie

z.B. bei einschaligen Hyperboloiden oder hyperbolischen Paraboliden vorkommen.

2 Beispiele

Einschaliges Hyperboloid

Im Raum wird das einschalige Hyperboloid durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \tag{1}$$

beschrieben. Wie schon erwähnt zählt es zu den windschiefen Regelflächen (siehe Abb. 1).

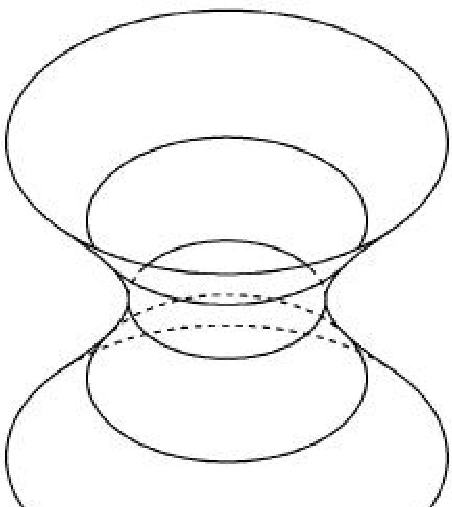

Abbildung 1: einschaliges Hyperboloid

Leicht erkennen kann man die Regelgeraden durch verdrehen eines Zylinders um die vertikale Achse. Mit 2 horizontalen Reifen, die man mit vertikalen

Fäden verbindet, ist dies sehr einfach nachzubauen (siehe Abb. 2). Das einschalige Hyperboloid enthält sogar noch eine zweite Lineatur derselben Fläche. Wird der Reifen um denselben Winkel in die entgegengesetzte Richtung gedreht, sieht man die Regelgeraden (siehe Abb. 3).

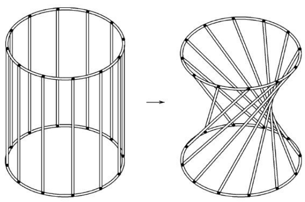

Abbildung 2: Verdrehen eines Zylinders liefert eine Lineatur eines Hyperboloids

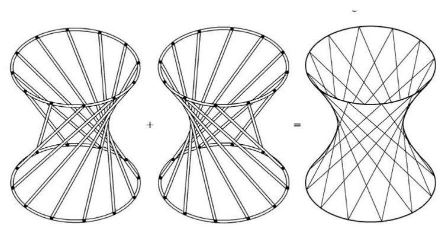

Abbildung 3: Ein doppelt liniertes einschaliges Hyperboloid

Dieser Flächentyp wird oft bei Kühltürmen von Kraftwerken aufgrund ihrer kühltechnischen Eigenschaften verwendet. (vgl. Graf, 2007)

Hyperbolisches Paraboloid

Ein weiteres Beispiel für eine windschiefe Regelfläche ist das hyperbolische Paraboloid, kurz HP-Fläche.

$$z = xy \tag{2}$$

Wie man oberhalb sieht kann die Gleichung sehr einfach beschrieben werden.

Auch diese Fläche ist doppelt liniert. Um die Regelgeraden konstruieren zu können, muss man die Schnitte der Fläche mit den Ebenen x = c nehmen, die parallel zur yz-Ebene liegen. Die zweite Lineatur bekommt man mit Schnitten mit den Ebenen y = c (siehe Abb. 4).

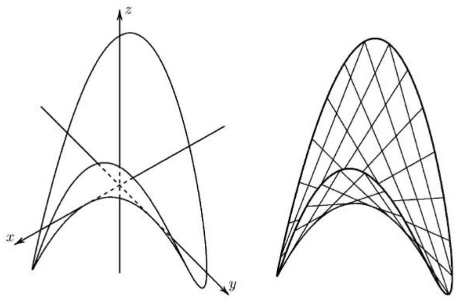

Abbildung 4: Ein hyperbolisches Paraboloid

Regelflächen finden z.B. in Konstruktionen und der Ingenieursarbeit ihre Anwendung. In der wohl bekanntesten unvollendeten Kathedrale der Welt, der „La Sagrada Familia“ in Barcelona sind sehr viele Regelflächen vorhanden. Dieser Erkenntnis hat man aber erst in den 1990er Jahren gemacht. Entworfen wurde die Basilika vom großartigen Architekten Antoni Gaudi. Durch seinen überraschenden Tod und durch die Vernichtung seiner Modelle und Pläne im spanischen Bürgerkrieg war es lange Zeit sehr schwierig, diese eigenwillige Kathedrale in seinem Sinne fertig zu stellen, da man glaubte kein System in seinem organischem Stil zu sehen. Erst ein australisches Architektenteam schaffte mit Computerhilfe, den von Gaudi verwendeten Kodex aus Regelflächen zu finden. Diese Erkenntnis bildet heute die Arbeitsgrundlage für den Weiterbau der Kirche, die bis zum 100. Todestag des Künstlers im Jahr 2026 endlich vollendet werden soll. Die Regelflächen in der „Sagrada Familia“ sind aber manchmal schwer zu erkennen, da sie sich überlagern (siehe Abb. 5 und 6).

Abbildung 5: Hyperboloide in der Sagrada Familia (vgl. Scienceblogs)

Abbildung 6: hyperbolische Paraboloide in der Sagrada Familia (vgl. Scienceblogs

Das hyperbolische Paraboloid und das einschalige Hyperboloid sind die einzigen doppel linierten Flächen. Auf diese Tatsache gehen wir später noch genauer ein.
Wir beweisen zuvor aber einen Satz, der dreifach linierte Flächen mehr oder weniger ausschließt.

2 Es gibt keine dreifach linierten Flächen, die nicht eben sind

Satz 1. *Sei S eine Regelfläche, und sei $A \in S$ ein Punkt, zu dem es drei verschiedene Geraden l_1, l_2 und l_3 durch A gibt, die auf der Fläche S liegen. Entweder enthält dann S eine ebene Kreisscheibe um A oder S besteht aus Geraden, die durch A verlaufen.*

Beweis. *Nach der Definition einer Fläche hat ein Teilstück von S um A eine eindeutige Projektion auf ein Gebiet D in einer Ebene P. Wir bezeichnen mit A', l'_1, l'_2 und l'_3 die Projektionen von A, l_1, l_2 und l_3 auf D. Wir wählen einen Punkt B in S der hinreichend nah bei A liegt und für den die Gerade BA nicht zur Fläche gehört ((wenn kein derartiger Punkt existiert, so besteht die Fläche S aus Geraden, die durch A verlaufen). Sei l eine Gerade durch B (die nicht durch A verläuft), die auf der Fläche S liegt. Seien B' und l' Projektionen von B und l auf die Ebene P. Dann muss, wenn B hinreichend nah* *an A liegt, die Gerade l' in unserem Gebiet D mindestens zwei der Geraden l_1', l_2' und l_3' schneiden. (Liegt B' hinreichend nah an A', so bilden die Geraden durch B', die l_1' in D nicht schneiden, tatsächlich einen kleinen Winkel α_1 bei B'. Und genauso ergeben sich kleine Winkel α_2 und α_3 für l_2' und l_3'. (Siehe Abb. 7) Diese drei Winkel sind disjunkt, sodass eine Gerade durch B' in D höchstens eine der Geraden l_1', l_2' und l_3' verfehlen kann.) Die Gerade l' soll l_1' und l_2' schneiden. Dann schneiden sich auch l, l_1, l_2 in drei verschiedenen Punkten. Und insbesondere gehören sie zu derselben Ebene Q. Für jeden Punkt $C \in S$, der hinreichend nah an A liegt, muss außerdem die Gerade auf der Fläche durch C mindestens zwei der Geraden l_1, l_2 und l_3 an verschiedenen Punkten schneiden (der Beweis ist zum vorherigen Beweis identisch), und folglich gehört C auch zu Q.*

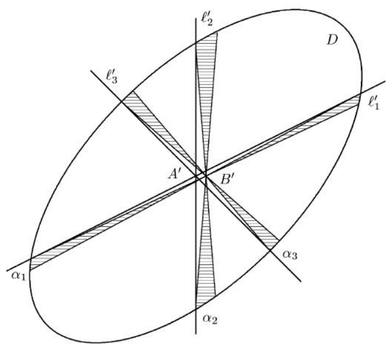

Abbildung 7: Die Winkel α_1, α_2 und α_3 sind disjunkt

3 Flächen, die von drei Geraden erzeugt werden

Proposition 1. *Sei A ein Punkt und seien l_1 und l_2 zwei Geraden im Raum, sodass A weder zu l_1 noch zu l_2 gehört und alle drei Objekte nicht auf ein und derselben Ebene liegen. Dann existiert eine eindeutige Gerade durch A, die sowohl zu l_1 als auch zu l_2 koplanar (schneidend oder parallel) ist.*

Beweis. *Sei P_1 die Ebene, die A und l_1 enthält, und sei P_2 die Ebene, die A und P_2 enthält. Aus der Annahme in der Proposition ergibt sich, dass solche Ebenen P_1, P_2 existieren und eindeutig und verschieden sind. Da sie nicht parallel zueinander verlaufen (beide enthalten A), ist ihre Schnittmenge eine Gerade. Diese Gerade l erfüllt die Bedingungen aus der Proposition. Eine solche Gerade ist eindeutig, weil sie sowohl zu P_1 als auch zu P_2 gehören muss. (Siehe Abb. 8)*

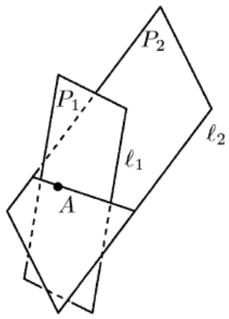

Abbildung 8: Bild zur Proposition 1

4 Gleichungen für Flächen, die durch drei Geraden erzeugt werden

Seien l_1 , l_2 und l_3 Geraden im Raum. Es werden nun Geraden betrachtet, die koplanar zu diesen drei Geraden sind. Nach Proposition 1 gibt es eine solche Gerade, die durch jeden Punkt von l_3 verläuft, und es gibt eine weitere Gerade, die parallel zu l_3 ist und l_1 und l_2 schneidet. Die Vereinigung S all dieser Geraden ist eine Regelfläche. Diese Fläche, die von den Geraden l_1, l_2 und l_3 erzeugt wird, bezeichnen wir als S.

Satz 2. *Sei S eine Fläche, die von den paarweise windschiefen Geraden l_1, l_2 und l_3 erzeugt wird.*

1. *Sind die Geraden l_1, l_2 und l_3 NICHT parallel zu einer Ebene, so wird S in einem (möglicherweise winschiefen) Koordinatensystem durch die Gleichung*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \tag{3}$$

beschrieben.

2. *Anderenfalls wird S in einem Koordinatensystem durch die Gleichung*

$$z = xy \tag{4}$$

beschrieben.

Um diesen Satz zu beweisen, formulieren wir im Folgenden 2 Lemmas, die wir separat beweisen werden und welche dann auch zum Beweis des Satzes führen werden.

Lemma 1. *Es existiert ein Koordinatensystem, in dem die Geraden durch die Gleichungen*

1. *(l_1) x=-z, y=1*
2. *(l_2) x=z, y=-1*
3. *(l_3) x=1, y=z*

beschrieben werden (sie setzen sich also aus Punkten (t,1,-t), (t,-1, t), (1, t, t) zusammen).

Beweis. *Sei l_i', $i = 1, 2, 3$, eine Gerade die parallel zu l_i ist und die beiden übrigen Geraden l_j $j \neq i$ schneidet. (Diese Gerade existiert und ist eindeutig. Und zwar wählen wir $j \neq i$ und betrachten die Ebene P, die durch Geraden erzeugt wird, die parallel zu l_i verlaufen und l_j schneiden. Diese Ebene ist nicht parallel zur dritten Geraden l_k, andernfalls ist sie parallel zu allen drei Geraden. Sei C der Schnittpunkt von P und l_k. Die Gerade durch C, die parallel zu l_i verläuft, schneidet sowohl l_j als auch l_k; es ist*

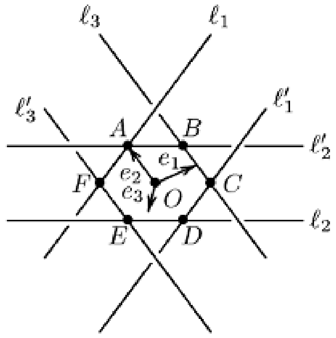

Abbildung 9: Hexagon 1

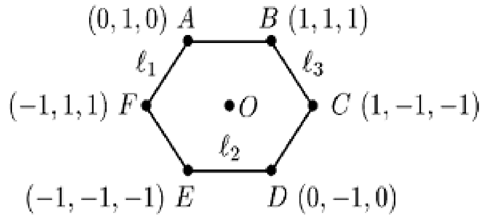

Abbildung 10: Hexagon 2

l'_i.) Die Geraden $l_1, l'_2, l_3, l'_1, l_2, l'_3$ bilden ein räumliches Hexagon mit parallelen gegen überliegenden Seiten. Seine Eckpunkte bezeichnen wir mit $ABCDEF$ (wobei A der Schnittpunkt von l_1 und l'_2 ist, B ist der Schnittpunkt von l'_2und l_3 usw; siehe Abb. 9) Die gegenüberliegenden Seiten diese Hexagons sind parallel (wie wir bereits erwähnt haben), sie haben aber auch noch gleiche Längen: Es gilt

$$\vec{A}D = \vec{A}B + \vec{B}C + \vec{C}D = \vec{A}F + \vec{F}E + \vec{E}D \tag{5}$$

.

Und weil eine Darstellung eines Vekors als Summe von Vektoren, die kollinear zu l_1, l_2 und l_3 sind, eindeutig ist, muss $\vec{A}D = \vec{C}D, \vec{A}B = \vec{E}D, \vec{B}C = \vec{F}E$ gelten. Daraus ergibt sich, dass das Hexagon $ABCDEF$ zentralsymmetrisch ist; wir verwenden sein Symmetriezentrum O als Ursprung eines Koordinatensystems. Als e_1 verwenden wir den Vektor von O zum Mittelpunkt von BC; als e_2 verwenden wir den Vektor $\vec{O}A$; als e_3 verwenden wir den Vektor $\vec{O}B - e_1 + e_2$. Im Koordinatensystem mit dem Ursprung O und den Basisvektoren e_1, e_2, e_3 haben die Punkte A, B, C, D, E und F die in der Abbildung 10 dargestellten Koordinaten. Wir stellen fest, dass die Punkte F und A Koordinaten haben, die die Gleichungen $x = -z, y = -1$, und die Koordinaten von B und C erfüllen die Gleichungen $x = 1, y = z$, sodass diese Gleichungen diejenigen der Geraden l_2 und l_3 sind.

Der Beweis dieses Lemmas ist auch der Beweis des ersten Teil des Satzes .

Die Geraden aus dem Lemma gehören offensichtlich zur Fläche S', die (in unserem Koordinatensystem) durch die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ beschrieben wird. Die Punkte von S' entsprechen den Punkten des einschaligen Hyperboloids (das im Standardkoordinatensystem durch die selbe Gleichung beschrieben wird), und diese Abbildung überführt Geraden in Geraden. Da das Hyperboloid die Vereinigung von Geraden ist, die zu beliebigen drei zueinander windschiefen Geraden koplanar sind, gilt das auch für S'. Die Fläche S' ist also die Vereinigung von Geraden, die koplanar zu l_1, l_2 und l_3 sind. Also ist S' identisch mit S und wir haben den ersten Teil unseres Satzes bewiesen.
Um den 2. Teil des Satzes zu beweisen, formulieren wir ein weiteres Lemma:

Lemma 2. *Es existiert ein Koordinatensystem, in dem die Geraden durch die Gleichungen*

1. *(l_1) y=-a, z=-ax*
2. *(l_2) y=0, z=0*
3. *(l_3) y=1, z=x*

beschrieben werden.

Beweis. *Halten wir die Geraden m_1 und m_2 fest, die die Geraden l_1, l_2 und l_3 in den Punkten A_1, A_2; B_1, B_2 und C_1, C_2 schneiden (siehe Abb. 11) Wir verwenden B_1 als Ursprung des Koordinatensystems und definieren Basisvektoren $e_1 = \vec{B_1B_2}, e_2 = \vec{B_1C_1}$ und $e_3 = \vec{B_1C_2} - e_1 - e_2$. Dann sind die Koordinaten der Punkte B_1, B_2, C_1 und C_2 wie in Abbildung 12 dargestellt. Weil die Geraden l_1, l_2 und l_3 in parallelen Ebenen liegen, gilt außerdem*

$$\frac{|\vec{A_1B_1}|}{|\vec{B_1C_1}|} = \frac{|\vec{A_2B_2}|}{|\vec{B_2C_2}|} = a,$$

und somit sind die Koordinaten der Punkte A_1 und A_2 gleich $(0,0,0) - a((0,1,0) - (0,0,0)) = (0,-a,0)$ und $(1,0,0) - a((1,1,1) - (1,0,0)) = (1,-a,-a)$. Daraus ergibt sich, dass die Geraden l_1, l_2 und l_3 die behaupteten Gleichungen besitzen.

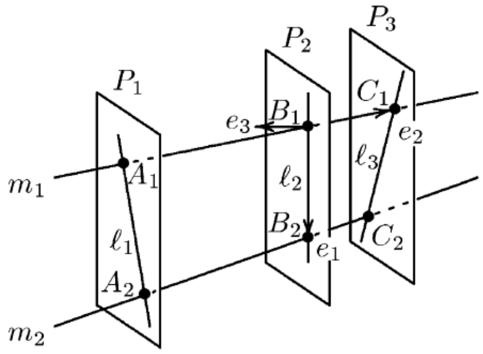

Abbildung 11: Beweis von Lemma 2

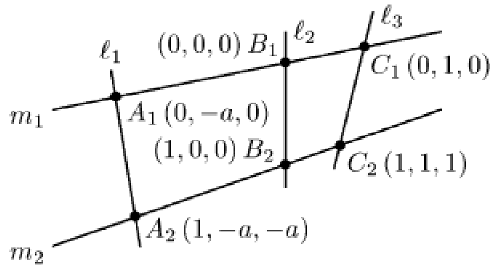

Abbildung 12: Beweis von Lemma 2

Aus diesem zweiten Lemma folgt nun Teil 2 unseres Satzes und dieser ist somit bewiesen.

Nun ist es auch so weit, dass die Frage beantwortet werden kann. Ein gut gestelltes Problem wäre, eine Gerade zu suchen, die zu einer gewissen Anzahl an windschiefen Geraden koplanar ist, sodass die Anzahl der gegebenen Geraden insgesamt vier ergibt. Der Grund dafür ist folgender: Die Geraden, die zu den ersten drei Geraden koplanar liegen, bilden eine Fläche, welche durch eine Gleichung zweiten Grades beschrieben wird. Die vierte Gerade schneidet diese Fläche in genau 1, 2 oder 0 Punkten, und jeder dieser Punkte liegt auf einer Gerade, die koplanar zu den ersten drei Geraden ist. Also ist dann die Anzahl der Lösungen 2, 1 oder 0 (wie bei einer quadratischen Gleichung).

5 Es gibt keine anderen doppelt linierten Flächen

Satz 3. *Sei S eine doppelt linierte Fläche, die keine ebenen Kreisscheiben enthält. Dann existiert für jeden Punkt A in S eine Fläche S_0, die durch drei Geraden erzeugt wird, derart, dass die Flächen S und S_0 in einer Kugel um A zusammenfallen.*

Anmerkung : Aus diesem Satz kann man folgern, dass jede zusammenhängende nicht-ebene, doppelt linierte Fläche durch drei windschiefe Geraden erzeugt wird und dass diese nach dem letzten Satz folglich in einem Koordinatensystem durch eine der Gleichungen $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ oder $z = xy$ beschrieben wird.

Beweis. *Da die Fläche nicht eben ist, gibt es nur zwei Geraden, die durch A verlaufen und in S liegen; diese beiden Geraden seien l_1 und l_2. Ein Teil der Fläche um A hat eine eineindeutige Projektion auf ein Gebiet D in einer Ebene. Seien A', l_1' und l_2' die Projektionen von A, l_1 und l_2 (siehe Abb. 13 links). Für einen Punkt B in S, der hinreichend nah an A liegt, schneidet jede Gerade durch sein Bild B' in D entweder l_1' oder l_2'. Seien m_1 und m_2 die beiden Geraden in S durch Punkt B, und seien m_1' und m_2' ihre Bilder in D. Dann schneidet jede Gerade m_1', m_2' in D eine der Geraden l_1', l_2'. Aber keine von beiden kann beide schneiden: Schneidet etwa m_1' sowohl l_1' als auch l_2', so bilden die Geraden m_1',l_1' und l_2' ein Dreieck, und das ebene innere Gebiet des Dreiecks sollte in S liegen (jede Gerade durch einen beliebigen Punkt C im Inneren dieses Dreiecks schneidet den Rand dieses Dreiecks in zwei Punkten und liegt folglich in der Ebene des Dreiecks.) Aus demselben Grund können die beiden Geraden m_1' und m_2' nicht ein und dieselbe Gerade l_1' oder l_2' schneiden. Somit schneidet in einer gewissen Umgebung von A jede Gerade in S durch einen Punkt von S, der nicht auf l_1 oder l_2 liegt, genau eine dieser Geraden.*

Daher können wir von zwei Geradenscharen in S sprechen: Geraden, die l_2 schneiden (einschließlich l_1) bilden die erste Schar, während Geraden, die l_1 schneiden (einschließlich l_2)die zweite Schar bilden. Offensichtlich ist, dass

1. *sich die Geraden in jeder Schar nicht schneiden;*

2. *jede Gerade aus jeder Schar jede Gerade der anderen Schar schneidet;*

3. *die Geraden jeder Schar die ganze Fläche überziehen (das ganze Gebiet um A)*

(siehe Abb. 13 rechts) Das zeigt, dass die Fläche (in einer Umgebung von A) durch drei Geraden aus jeder der beiden Scharen erzeugt wird.

Also folgt daraus, dass jede nicht-ebene doppelt linierte Fläche, zumindest lokal, entweder ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid sein muss.

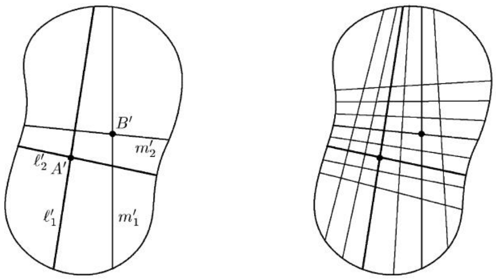

Abbildung 13: Beweis von Satz 3

6 Schattentheater

Zu guter Letzt lassen wir am Ende dieser Arbeit noch ein paar Schattenkonfigurationen von Lineaturen einer doppelt linierter Fläche auf einem flachen Schirm entstehen. Das Beispiel zeigt ein einschaliges, aus zwei Reifen und einigen identischen Speichen (Lineaturen) aufgebautes Hyperboloid.

Annahmen : Alle Lichtstrahlen sollen sowohl parallel zueinander (das heißt, dass sich die Lichtquelle in unendlicher Entfernung befinden soll) als auch parallel zu einer Geraden auf dem Hyperboloid sein - nehmen wir l.

Beim ersten Beispiel ignorieren wir die Reifen (die Geraden der Lineaturen gehen also gegen unendlich und sind nicht durch die Reifen begrenzt). Der Schatten von l ist nun ein Punkt A. Eine der Geraden aus der zweiten Schar, nennen wir sie l' verläuft parallel zu l; auch ihr Schatten wird ein Punkt sein (etwa A'). Außer l wird jede Geraden aus der ersten Schar l' schneiden, also ist ihr Schatten durch A'. Analog dazu verlaufen die Schatten aller Geraden aus der zweiten Schar durch A. Fazit: Es verlaufen alle auf den Schirm projezierten Geraden entweder durch A oder A', aber keine kann durch beide Punkte verlaufen (siehe Abb. 14)

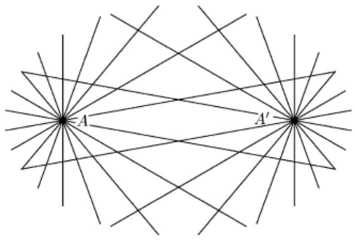

Abbildung 14: Schatten der Regelgeraden

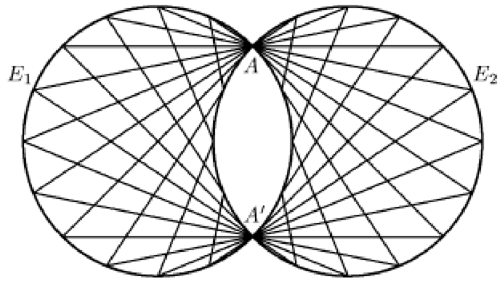

Abbildung 15: Schatten der Speichen und Reifen

Betrachten wir jetzt auch die Reifen. Sie bilden als Schatten gleichmäßige Ellipsen E_1 und E_2. Ist der Schirm orthogonal zu den Lichtstrahlen, so werden die Ellipsen zu Kreisen. Die zwei Ellipsen verlaufen beide sowohl durch A als auch A', weil die beiden Geraden l und l' die Reifen natürlich schneiden. Wenn s der Schatten der Geraden m aus der zweiten Schar , so schneidet s die Ellipse E_1 in zwei Punkten, nämlich in den Punkten A und B, und die Ellipse E_2 ebenfalls in zwei Punkten nämlich in den Punkten A und B'; das Segment BB' ist dann der Schatten der Gerade m zwischen den Reifen. Auch die Schatten der Geraden aus der ersten Schar kann man so zeichnen (siehe Abb. 15).

Quellen:

- FUCHS, Dimitry; TABACHNIKOV, Serge: Ein Schaubild der Mathematik: 30 Vorlesungen über klassische Mathematik. Berlin, Heidelberg: Springer 2011.

  Wenn nicht anders vermerkt, wurden alle Angaben aus diesem Werk entnommen.

- http://scienceblogs.de/mathlog/2008/10/16/die-mathematik-der-heiligen-familie/
  [Zugriff am 3. Juni 2013]

- http://geometrie.gym-admont.at/fba/graf/fba_graf.pdf
  [Zugriff am 5. Juni 2013]

- http://de.wikipedia.org/wiki/Regelfläche
  [Zugriff am 2. Juni 2013]