Karl-Franzens Universität Graz
Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen
Heinrichstrasse 22/I
8010 Graz

Gleichungen dritten und vierten Grades

Sandra Fink und Benedikt Neuhold

Mathematisches Seminar

Sommersemester 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Gleichungen dritten Grades **1**
2.1 Formel für die Lösung einer kubischen Gleichung 1
2.2 Wie viele Lösungen gibt es? 5
2.3 Negative Diskriminante 8
2.4 Lösen von kubischen Gleichungen mithilfe der Trigonometrie 9

3 Gleichungen vierten Grades **12**
3.1 Beispiel 14

4 Schlusswort **17**

1 Einleitung

Die “große” und “kleine” Auflösungsformel für quadratische Gleichungen, die in Deutschland treffenderweise umgangssprachlich auch „Mitternachtsformel“ heißt, da Schüler sie auswendig kennen sollen, selbst wenn man sie um Mitternacht weckt, ist eine der berühmtesten Formeln der Mathematik. Sie ist relativ einfach zu merken, praktisch anzuwenden und vielseitig einsetzbar.

Auch für das Lösen von kubischen Gleichungen gibt es mit der Cardanischen Formel eine allgemeine Lösungsformel. Diese Lösungsformel ist Schülern jedoch weitgehend unbekannt. Stattdessen ist die übliche „Schulmethode“ zum Lösen kubischer Gleichungen: Erraten einer Lösung – Polynomdivision – Lösen der vereinfachten Gleichung. Diese Vorgehensweise ist allerdings nur für ausgewählte Beispiele brauchbar. Bei anderen, scheinbar „einfachen“ kubischen Gleichungen, wie zum Beispiel der Gleichung $x^3 + 6x - 2 = 0$, ist das Erraten einer Lösung und somit die weitere Berechnung kaum möglich.

In der folgenden Seminararbeit wollen wir eine allgemeine Lösungsformel bzw. Lösungsverfahren für Gleichungen dritten und auch vierten Grades näher betrachten und uns über eine mögliche Einführung in der Schule Gedanken machen. Es wird dazu die Cardanische Formel zur Lösung kubischer Gleichungen und ihre Anwendbarkeit untersucht. Für Gleichungen vierten Grades wird ebenfalls ein Lösungsprozedere vorgestellt.

Diese Seminararbeit basiert zum größten Teil auf dem Kapitel „Gleichungen dritten und vierten Grades “im Buch „Ein Schaubild der Mathematik “von Dmitry Fuchs und Serge Tabachnikov.

2 Gleichungen dritten Grades

2.1 Formel für die Lösung einer kubischen Gleichung

Allgemein schreibt man kubische Gleichungen in der Form

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

Für unsere weiteren Betrachtungen werden wir aber die reduzierte Form verwenden.

$$x^3 + px + q = 0 \tag{2}$$

Die allgemeine Form (1) kann durch Substitution leicht auf die reduzierte Form gebracht werden. Wir substituieren $x = y - \frac{a}{3}$ und erhalten folgende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c&=0\\
\left(y-\frac{a}{3}\right)\left(y^2-\frac{2a}{3}y+\frac{a^2}{9}\right)+a\left(y^2-\frac{2a}{3}y+\frac{a^2}{9}\right)+by-\frac{ab}{3}+c&=0\\
y^3-\cancel{\frac{2a}{3}y^2}+\frac{a^2}{9}y-\cancel{\frac{a}{3}y^2}+\frac{2a^2}{9}y-\frac{a^3}{27}+\cancel{ay^2}-\frac{2a^2}{3}y+\frac{a^3}{9}+by-\frac{ab}{3}+c&=0\\
y^3+\underbrace{\left(b-\frac{a^2}{3}\right)}_{=p}y+\underbrace{\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)}_{=q}&=0
\end{aligned}
$$

Wir sehen, dass man durch einfache Substitution und etwas Rechenaufwand eine allgemeine kubische Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$ in eine kubische Gleichung in reduzierter Form $y^3+py+q=0$ bringen kann.

Im nächsten Schritt versuchen wir nun eine Lösungsformel für diese kubische Gleichung in reduzierter Form zu finden.
Sei nun $x=u+v$ eine Lösung unserer Gleichung.

$$
\begin{aligned}
x^3+px+q&=0\\
x^3&=-px-q
\end{aligned}
$$

Wir setzen $x=u+v$ in den linken Teil von $x^3=-px-q$ ein und erhalten:

$$(u+v)^3=u^3+v^3+3uv\underbrace{(u+v)}_{x}=-px-q \tag{3}$$

Führt man bei Gleichung (3) einen Koeffizientenvergleich durch, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
-q&=u^3+v^3\\
-p&=3uv
\end{aligned} \tag{4}
$$

Diese Gleichungen erinnern sehr stark an den Satz von Viëta, den wir aus diesem Grund näher betrachten wollen.

Satz 2.1 (Satz von Viëta)**.**
Sei $x^2+px+q=0$ eine quadratische Gleichung mit den Lösungen x_1 und x_2. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
p&=-(x_1+x_2)\\
q&=x_1\cdot x_2
\end{aligned}
$$

Formen wir nun die Gleichungen aus (4) ein wenig um:

$$\begin{aligned} -q &= u^3 + v^3 \\ q &= -(u^3 + v^3) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -p &= 3uv \\ -p^3 &= 27u^3v^3 \\ -\frac{p^3}{27} &= u^3v^3 \end{aligned} \tag{5}$$

Nach dem Satz von Viëta sind u^3 und v^3 Lösungen der folgenden quadratischen Gleichung $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$.

Wenden wir die kleine Auflösungsformel für quadratische Gleichungen mit $p = q$ und $q = -\frac{p^3}{27}$ an, so erhalten wir als Lösungen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Wir wissen, dass v^3 und u^3 Lösungen dieser Gleichung sind. Daher gilt:

$$\begin{aligned} u^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ v^3 &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{aligned} \tag{6}$$

Die Summe aus u und v ist eine Lösung unserer kubischen Ausgangsgleichung.

$$x = u + v \Rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Betrachtet man diese Formel für die Lösung einer kubischen Gleichung näher, erkennt man, dass sie weder übermäßig kompliziert, noch lang ist. Warum also hat es diese Auflösungsformel für kubische Gleichungen - sie wird auch “Cardanische Formel” genannt - nicht in Schulbücher geschafft? Wir wollen die Formel noch genauer unter die Lupe nehmen.

Satz 2.2 (Cardanische Formel)**.**
Sei $x^3 + px + q = 0$ eine kubische Gleichung in reduzierter Form und es gelte $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$. Dann ist

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

eine Lösung dieser Gleichung.

Beweis.
Sei $x = u + v$ mit $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ und $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

zu zeigen: x ist eine Lösung der Gleichung $x^3 + px + q = 0$.

$$x^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv\underbrace{(u+v)}_{=x}$$

$$u^3 + v^3 = -\frac{q}{2} + \cancel{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{q}{2} - \cancel{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -q \tag{7}$$

$$3uv = 3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)} =$$
$$= 3 \cdot \sqrt[3]{\cancel{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4}} - \frac{p^3}{27}} = 3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -3 \cdot \frac{p}{3} = -p$$

$$x^3 = -q - px \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + px + q = 0$$

$\square$

Beispiel 2.1.
$x^3 + 6x - 2 = 0 \Rightarrow p = 6,\ q = -2$

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{9}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{9}} = \sqrt[3]{4} + \underbrace{\sqrt[3]{-2}}_{-\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \approx 0.33$$

Hier wäre man mit der üblichen Schulmethode - erraten einer Lösung und Polynomdivision - nur schwer auf die Lösung gekommen. Die Lösungsformel liefert das Ergebnis jedoch ohne großen Rechenaufwand.

Beispiel 2.2.
$x^3 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow p = 3,\ q = -4$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4+1}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4+1}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$$

Bei diesem Beispiel merken wir schon, wie umständlich die Verwendung der Cardanischen Formel manchmal ist. Hier würde man mit der Schulmethode auch ohne Taschenrechner leicht auf die Lösung kommen.

Beispiel 2.3.
Erstellen wir uns selber ein Beispiel mit drei Lösungen. Sei $x_1 = -3, x_2 = 2$ und $x_3 = 1$. Dann ergibt

sich die kubische Gleichung mit den Nullstellen x_1, x_2, x_3 durch die Zerlegung in Linearfaktoren

$$\begin{aligned}(x+3)(x-2)(x-1) &= 0\\ (x^2-2x+3x-6)(x-1) &= 0\\ x^3+x^2-6x-x^2-x+6 &= 0\\ x^3-7x+6 &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow p=-7,\ q=6$. Verwenden wir nun die Cardanische Lösungsformel (2.2)

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[3]{-3+\sqrt{9-\frac{343}{27}}}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{9-\frac{343}{27}}}\\ &= \sqrt[3]{-3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}\\ &= \sqrt[3]{-3+\frac{10i}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{-3-\frac{10i}{3\sqrt{3}}}\end{aligned} \tag{8}$$

Wir sehen in Beispiel 2.3, dass wir nicht die gewünschten Nullstellen, aus denen wir unsere Gleichung aufgestellt haben, erhalten. Die Formel scheint in diesem Fall zu versagen.
Es ist anzunehmen, dass die Lösungsformel nur für kubische Gleichungen mit einer einzigen reellen Lösung gilt. Um dieser Annahme auf den Grund zu gehen, wollen wir uns zunächst überlegen, wie viele Lösungen eine kubische Gleichung generell haben kann.

2.2 Wie viele Lösungen gibt es?

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat jede kubische Gleichung der Form $x^3+ax^2+bx+c=0$ drei Lösungen in $\mathbb{C}$ (die jedoch zusammenfallen können).

Satz 2.3 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Jede Gleichung der Form

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

mit $n\in\mathbb{N}$ und $a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$ besitzt eine Lösung in $\mathbb{C}$.
Die Anzahl der Lösungen, mit der richtigen Vielfachheit gezählt, ist gleich dem Grad des Polynoms.

Schauen wir uns einige Sätze an, die für unsere weiteren Betrachtungen nützlich sein werden.

Satz 2.4 (Zerlegungssatz)**.**
Jedes Polynom $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ vom Grad $n,m\in\mathbb{N}, n\geq 1, n\geq m$ lässt sich mithilfe seiner (verschiedenen) Nullstellen $z_1,\ldots,z_m$ und deren Vielfachheiten $k_1,\ldots,k_m$ in der Form

$$P(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m}$$

darstellen und es gilt

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$$

Satz 2.5 (Summe der Nullstellen).
Sind x_1, x_2, x_3 Lösungen der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Dann gilt

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3)$$

Beweis.
Seien x_1, x_2 und x_3 Lösungen der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.
Nach dem Zerlegungssatz 2.4 lässt sich diese Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) &= (x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - x_1x^2 - x_2x^2 + x_1x_2x - x_3x^2 + x_1x_3x + x_2x_3x - x_1x_2x_3 \\ &= x^3 - \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{=a} x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3\end{aligned}$$

Daraus folgt $a = -(x_1 + x_2 + x_3)$. □

Lemma 2.6.
Sind x_1, x_2 und x_3 Nullstellen der kubischen Gleichung in reduzierter Form $x^3 + px + q = 0$, dann gilt

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Beweis.
Nach Satz 2.5 gilt $a = -(x_1 + x_2 + x_3)$. Aus der reduzierten Form der Gleichung folgt $a = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$ □

Definition 2.7.
Sei $x^3 + px + q = 0$ eine kubische Gleichung in reduzierter Form. Dann nennt man

$$D := \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$$

die **Diskriminante** dieser Gleichung.

Lemma 2.8.
Die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ hat genau zwei reelle Lösungen, wenn $p < 0$ und $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0$ ist.

Beweis.
„$\Rightarrow$"
2 Lösungen $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : a$ ist eine doppelte Nullstelle der Gleichung. a muss auch $\neq 0$ sein, da sonst aus Lemma 2.6 folgen würde, dass a eine dreifache Nullstelle wäre.
Sei nun $a \neq 0$ diese doppelte Nullstelle, dann folgt nach Lemma 2.6 das die dritte Nullstelle $-2a$ sein muss.
zu zeigen: $p < 0$ und $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0$.

$$\begin{aligned}x^3 + px + q &= (x - a)^2(x + 2a) = (x^2 - 2ax + a^2)(x + 2a) = \\ &= x^3 + 2ax^2 - 2ax^2 - 4a^2x + a^2x + 2a^3 = x^3 - 3a^2x + 2a^3\end{aligned}$$

Führen wir einen Koeffizientenvergleich durch erhalten wir:

$$p = -3a^2 < 0 \quad \checkmark$$
$$q = 2a^3$$

Betrachten wir nun die Diskriminante:

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = \frac{(-3a^2)^3}{27} + \frac{(2a^3)^2}{4} = \frac{-\cancel{27}a^6}{\cancel{27}} + \frac{\cancel{4}a^6}{\cancel{4}} = 0$$

„$\Leftarrow$“
Sei $p < 0, D = 0$ und $b \neq 0$.
zu zeigen: Die Gleichung besitzt genau zwei Lösungen.
Suchen wir eine Nullstelle b der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ mithilfe der Formel 2.2. Unter Bedachtnahme das $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = 0$ ist, erhalten wir:

$$b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{9}$$
$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \tag{10}$$
$$= \sqrt[3]{-\frac{\cancel{8}^{4}q}{\cancel{2}}} = -\sqrt[3]{4q} \tag{11}$$

Berechnen wir nun aus der Nullstelle q, so erhalten wir

$$b = -\sqrt[3]{4q} \Leftrightarrow \boxed{q = -\frac{b^3}{4}} \Rightarrow q^2 = \frac{b^6}{16}$$

Wir setzen q in die Voraussetzung ein, um p zu berechnen.

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$
$$\frac{p^3}{27} = -\frac{q^2}{4}$$
$$p = \sqrt[3]{-\frac{27q^2}{4}} \qquad \Big|\, q^2 = \frac{b^6}{16}$$
$$p = \sqrt[3]{-\frac{27\frac{b^6}{16}}{4}} = \sqrt[3]{-\frac{27b^6}{64}}$$
$$\boxed{p = -\frac{3b^2}{4}}$$

Setzen wir nun q und p in die Gleichung ein:

$$x^3 - \frac{3}{4}b^2x - \frac{1}{4}b^3 = 0 \tag{12}$$

Da wir wissen, dass b eine Nullstelle dieses Polynoms ist, können wir eine Polynomdivision durchführen.

$$\left(x^3 - \frac{3}{4}b^2x - \frac{1}{4}b^3\right) : (x-b) = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = \left(x - \frac{1}{2}b\right)^2 \tag{13}$$

Setzen wir das Ergebnis der Polynomdivision (13) in die Gleichung (12) ein:

$$(x-b)\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 = x^3 - \frac{3}{4}b^2x - \frac{1}{4}b^3 = 0$$

Daraus folgt, dass $\frac{1}{2}b$ eine doppelte Nullstelle ist. □

Satz 2.9.
Die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ hat

- 1 reelle Lösung, falls $D > 0$ (oder $p = q = 0$)
- 2 reelle Lösungen, falls $D = 0$ (und $p < 0$)
- 3 reelle Lösungen, falls $D < 0$ ist.

Es gilt insbesondere, dass alle Lösungen reell sind, falls $D \leq 0$. Dies beinhaltet automatisch auch, dass das ursprüngliche Polynom nur reelle Koeffizienten hatte.

Satz 2.10.
Sei $x = \underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}_{*}$ und sei $x^3 + px + q = 0$ die reduzierte kubische Gleichung. Dann gilt:

- falls die Gleichung eine oder zwei reelle Nullstellen hat $\Rightarrow *$ ist in $\mathbb{R}$ definiert (da $D \geq 0$).
- falls die Gleichung drei verschiedene reelle Nullstellen hat $\Rightarrow *$ ist in $\mathbb{R}$ nicht definiert (da $D < 0$). $*$ ist dann die Summe von kubischen Wurzeln komplexer Zahlen.

2.3 Negative Diskriminante

Um eine Lösung für den Fall $D < 0$ zu erhalten, müssen wir die kubische Wurzel aus einer komplexen Zahl ziehen. Ist $a + ib$ eine komplexe Zahl deren dritte Wurzel wir berechnen möchten, so müssen wir uns fragen, für welches x und y gilt

$$(x + iy)^3 = a + ib$$

$$\begin{aligned}(x+iy)^3 &= (x^2 + 2ixy - y^2)(x+iy) = x^3 + 2ix^2y - xy^2 + ix^2y - 2xy^2 - iy^3 \\ &= \underline{(x^3 - 3xy^2)} + i\underline{(3x^2y - y^3)} = (\underline{a} + i\underline{b})\end{aligned}$$

Vergleichen wir den reellen und komplexen Anteil, erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 &= a \\ 3x^3y - y^3 &= b \end{aligned}$$

Lösen wir das Gleichungssystem auf, erhalten wir

$$\begin{aligned} 27b^2x^3 &= 64x^9 - 48ax^6 - 15a^2x^3 - a^3 \\ 27b^2x^3 &= (x^3 - a)(8x^3 + a)^2 \end{aligned}$$

Wir erhalten wieder eine kubische Gleichung in $t = x^3$, die drei Lösungen besitzen muss (die Ausgangsgleichung $x + iy = \sqrt[3]{a + ib}$ besitzt drei Lösungen, da jede n-te Wurzel in $\mathbb{C}$ n Lösungen besitzt). Daher können wir diese mithilfe der Cardanischen Formel (2.2) nicht berechnen.
Um die Wurzel einer komplexen Zahl zu berechnen, müssen wir die Formel von de Moivre verwenden.

Satz 2.11 (Moivrescher Satz)**.**
Für jedes $z \in \mathbb{C}$ (insbesondere dann auch für $x \in \mathbb{R}$) und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

Aus dieser Formel lässt sich sehr einfach eine Formel zur Berechnung von kubischen Wurzeln ableiten.

Lemma 2.12.
Sei $x \in \mathbb{C}$ und $x = r \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{3}\varphi\right) + i\sin\left(\frac{1}{3}\varphi\right)\right)$$

Beweis.

$$\underline{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{r \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))} = \sqrt[3]{r} \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^{\frac{1}{3}} \stackrel{(2.11)}{=} \underline{\sqrt[3]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{3}\varphi\right) + i\sin\left(\frac{1}{3}\varphi\right)\right)}$$

□

Man kann jedoch auch kubische Gleichungen mithilfe der Trigonometrie lösen, ohne die Cardanische Formel (2.2) zu verwenden.

2.4 Lösen von kubischen Gleichungen mithilfe der Trigonometrie

In der Trigonometrie gibt es eine Formel für den Sinus eines Dreifachwinkels. Diese lautet:

$$\sin(3\varphi) = 3\sin(\varphi) - 4\sin^3(\varphi) \tag{14}$$

Hätten wir nun eine Gleichung der Form

$$4x^3 - 3x + \sin(3\varphi) = 0$$

oder umgeformt

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{\sin(3\varphi)}{4} = 0$$

so wäre die Lösung $x = \sin(\varphi)$. Haben wir eine Gleichung in der Form $x^3 - \frac{3}{4}x + q = 0$, so können wir ebenfalls die Lösung berechnen.
Für q gilt

$$\begin{aligned} q &= \frac{\sin(3\varphi)}{4} \\ 4q &= \sin(3\varphi) \\ \frac{1}{3} \cdot \sin^{-1}(4q) &= \varphi \end{aligned}$$

Setzen wir nun φ in unsere Lösung $x = \sin(\varphi)$ ein erhalten wir

$$x = \sin\left(\frac{1}{3}\sin^{-1}(4q)\right)$$

Es ist aber selten der Fall, dass wir nur Gleichungen mit $p = -\frac{3}{4}$ lösen müssen. Betrachten wir eine Gleichung für die $p \neq -\frac{3}{4}$ gilt. Substituieren wir $x = ay$ so erhalten wir

$$a^3y^3 + apy + q = 0$$

oder

$$y^3 + \frac{p}{a^2}y + \frac{q}{a^3} = 0$$

Wir kennen eine Lösung für $p = -\frac{3}{4}$. Daher setzen wir

$$\frac{p}{a^2} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow a = \sqrt{-\frac{4p}{3}}$$

Daraus ergibt sich die Lösung

$$y = \sin\left(\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{4q}{\sqrt{\left(-\frac{4p}{3}\right)^3}}\right)$$

Durch Rücksubstitution ergibt sich

$$\begin{aligned} x = ay &= \sqrt{-\frac{4p}{3}} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{4q}{\sqrt{\left(-\frac{4p}{3}\right)^3}}\right)\right) \\ x &= \sqrt{-\frac{4p}{3}} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{9q}{4p^2} \cdot \sqrt{-\frac{4p}{3}}\right)\right) \end{aligned} \tag{15}$$

Allerdings gelten auch für diese Formel einige Einschränkungen. p muss negativ sein und die Argumente von $\sin^{-1}$ müssen im Intervall $[-1,1]$ liegen. Das bedeutet

$$\begin{aligned}\left|\frac{9q}{4p^2}\cdot\sqrt{-\frac{4p}{3}}\right| &\leq 1 \\ -\frac{81q^2\cdot 4p}{16p^4\cdot 3} &\leq 1 \\ \frac{27q^2}{4p^3} &\geq -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}27q^2 &\leq -4p^3 \\ 27q^2+4p^3 &\leq 0 \\ \frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4} &\leq 0\end{aligned}$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit dem Satz 2.10 so erkennen wir, dass diese Formel genau dann funktioniert wenn die Cardanische Formel versagt.
Die trigonometrische Formel (15) liefert immer drei Lösungen. Im Fall

$$\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{9q}{4p^2}\cdot\sqrt{-\frac{4p}{3}}\right)$$

sind die drei Lösungen

$$x=\sqrt{-\frac{4p}{3}}\cdot\sin\left(\frac{1}{3}(\alpha+2k\pi)\right)\quad \text{für } k=0,1,2$$

3 Gleichungen vierten Grades

Eine jede quartische Gleichung der Form

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

kann durch Substitution mit $x = y - \frac{a}{4}$ in die äquivalente Form

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{16}$$

gebracht werden. Genau wie im kubischen Fall wird der "zweitführende" Term mit x^3 eliminiert. Sind nun x_1, x_2, x_3 und x_4 Lösungen dieser Gleichung, so gilt

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$

Rechnen wir nun die Zerlegung der Linearfaktoren (z.B. mit Mathematica) aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2 -\\ &- (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4 = 0\end{aligned}$$

Führen wir einen Koeffizientenvergleich mit der Gleichung (16) durch, erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}0 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4\\ p &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\\ -q &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4\\ r &= x_1x_2x_3x_4\end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned}y_1 &= (x_1 + x_2)(x_3 + x_4),\\ y_2 &= (x_1 + x_3)(x_2 + x_4),\\ y_3 &= (x_1 + x_4)(x_2 + x_3).\end{aligned}$$

Der obige Koeffizientvergleich hat ergeben, dass $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Daher können wir die y_i auch als negative Quadrate schreiben

$$\begin{aligned}y_1 &= -(x_1 + x_2)^2 = -(x_3 + x_4)^2 \text{ denn } (x_1 + x_2) = -(x_3 + x_4),\\ y_2 &= -(x_1 + x_3)^2 = -(x_2 + x_4)^2 \text{ denn } (x_1 + x_3) = -(x_2 + x_4),\\ y_3 &= -(x_1 + x_4)^2 = -(x_2 + x_3)^2 \text{ denn } (x_1 + x_4) = -(x_2 + x_3).\end{aligned}$$

Sei nun

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

die kubische Gleichung mit y_1, y_2 und y_3 als Lösungen. Diese Gleichung nennt man die **kubische**

Resolvente einer Gleichung vierten Grades. Aus dieser folgt

$$\begin{aligned} a &= -y_1 - y_2 - y_3 \\ b &= y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 \\ c &= -y_1y_2y_3 \end{aligned}$$

Versuchen wir nun a, b und c mithilfe von p, q und r darzustellen. Durch direktes Nachrechnen erhalten wir

$$\begin{aligned} a &= -2p \\ b &= p^2 - 4r \\ c &= q^2 \end{aligned}$$

Die somit erhaltene Gleichung dritten Grades $y^3 - 2py^2 + (p^2 - 4r)y + q^2 = 0$ ist die Resolvente einer Gleichung vierten Grades. Um die Ausgangsgleichung vierten Grades zu lösen, bestimmen wir zuerst die Lösungen der kubischen Resolvente y_1, y_2 und y_3. Danach geht man den Weg wieder zurück (Rücksubstitution) und erhält x_1, x_2, x_3 und x_4. Wegen

$$\begin{aligned} y_1 &= (x_1 + x_2)^2 = -(x_3 + x_4)^2 \\ y_2 &= (x_1 + x_3)^2 = -(x_2 + x_4)^2 \\ y_3 &= (x_1 + x_4)^2 = -(x_2 + x_3)^2 \end{aligned}$$

und

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -(x_3 + x_4) = \pm\sqrt{-y_1}, \\ x_1 + x_3 &= -(x_2 + x_4) = \pm\sqrt{-y_2}, \\ x_1 + x_4 &= -(x_2 + x_3) = \pm\sqrt{-y_3}, \end{aligned}$$

Durch addieren der einzelnen Gleichungen erhalten wir

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_1 = \pm\sqrt{-y_1} \pm \sqrt{-y_2} \pm \sqrt{-y_3} \Rightarrow x_1 = \frac{\pm\sqrt{-y_1} \pm \sqrt{-y_2} \pm \sqrt{-y_3}}{2}$$

Die Formeln für x_2, x_3 und x_4 berechnen sich analog und sind genau dieselben. Indem die Vorzeichen im Ausdruck $\pm\sqrt{-y_1} \pm \sqrt{-y_2} \pm \sqrt{-y_3}$ variieren, erhalten wir acht Zahlen, nämlich $\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3$ und $\pm x_4$. Vier dieser acht Zahlen sind die gesuchten Lösungen der Gleichung vierten Grades. Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung wird überprüft, welche Lösungen die richtigen sind.

Im nächsten Abschnitt wollen wir dieses Lösungsprozedere für Gleichungen vierten Grades anhand eines Beispiels noch genauer vorführen.

3.1 Beispiel

Löse die folgende Gleichung vierter Ordnung.

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x = 0$$

Diese Gleichung werden wir mithilfe des (teils) im vorigen Abschnitt beschriebenen Prozedere lösen.

- **Schritt 1:**
  Die Ausgangsgleichung der Form $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ in reduzierte Form $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ bringen, indem man mit $x = y - \frac{a}{4}$ substituiert.

$$a = 1 \Rightarrow x = y - \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \left(y - \frac{1}{4}\right)^4 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^3 - 4\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - 4\left(y - \frac{1}{4}\right) &= 0 \\ y^4 \underbrace{-\frac{35}{8}}_{=p} y^2 \underbrace{-\frac{15}{8}}_{=q} y + \underbrace{\frac{189}{256}}_{=r} &= 0 \end{aligned}$$

- **Schritt 2:**
  Die kubische Resolvente $z^3 - 2pz^2 + (p^2 - 4r)z + q^2 = 0$ berechnen.

$$\begin{aligned} z^3 - 2\left(-\frac{35}{8}\right) z^2 + \left(\frac{35^2}{8^2} - 4 \cdot \frac{189}{256}\right) z + \frac{15^2}{8^2} &= 0 \\ z^3 + \frac{35}{4} z^2 + \frac{259}{16} z + \frac{225}{64} &= 0 \end{aligned}$$

- **Schritt 3:**
  Die kubische Resolvente der Form $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ in reduzierte Form $\tilde{z}^3 + n\tilde{z} + m = 0$ bringen, indem man mit $z = \tilde{z} - \frac{a}{3}$ substituiert.

$$a = \frac{35}{4} \Rightarrow z = \tilde{z} - \frac{35}{12}$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{z} - \frac{35}{12}\right)^3 + \frac{35}{4}\left(\tilde{z} - \frac{35}{12}\right)^2 + \frac{259}{16}\left(\tilde{z} - \frac{35}{12}\right) + \frac{225}{64} &= 0 \\ \tilde{z}^3 - \frac{28}{3}\tilde{z} - \frac{160}{27} &= 0 \end{aligned}$$

- **Schritt 4:**
  Die reduzierte Form der kubischen Resolvente lösen.

$$\tilde{z}^3 - \frac{28}{3}\tilde{z} - \frac{160}{27} = 0$$

$$\tilde{z}_1 = \frac{8}{3}$$
$$\tilde{z}_2 = \frac{2}{3}$$
$$\tilde{z}_3 = -\frac{10}{3}$$

- **Schritt 5:**
  Die gefundenen Lösungen (der reduzierten Form der kubischen Resolvente) in die Ausgangsform der kubischen Resolvente rücksubstituieren.

$$z = \tilde{z} - \frac{35}{12}$$

$$z_1 = \frac{8}{3} - \frac{35}{12} = -\frac{1}{4}$$
$$z_2 = \frac{2}{3} - \frac{35}{12} = -\frac{9}{4}$$
$$z_3 = -\frac{10}{3} - \frac{35}{12} = -\frac{25}{4}$$

- **Schritt 6:**
  Folgende acht Zahlen berechnen.

$$\frac{\pm\sqrt{-z_1} \pm \sqrt{-z_2} \pm \sqrt{-z_3}}{2}$$

z_1, z_2 und z_3 sind die Lösungen der kubischen Resolvente. Dadurch erhält man die Lösungen der reduzierten Form der Ausgangsgleichung.

$$\sqrt{-z_1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$
$$\sqrt{-z_2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$
$$\sqrt{-z_3} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}$$
$$y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$
$$y_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}$$
$$y_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) = -\frac{7}{4}$$

$$y_5 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{4}$$
$$y_6 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$
$$y_7 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$$
$$y_8 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

- **Schritt 7:**
  Die gefundenen Lösungen (der reduzierten Form der Ausgangsgleichung) in die Ausgangsglei-

chung rücksubstituieren.

$$x = y - \frac{1}{4}$$

$$x_1 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \textbf{2} \checkmark \qquad x_5 = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$
$$x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \qquad x_6 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \textbf{-1} \checkmark$$
$$x_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad x_7 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \textbf{0} \checkmark$$
$$x_4 = -\frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \textbf{-2} \checkmark \qquad x_8 = -\frac{9}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{2}$$

Vier dieser Zahlen sind Lösungen der Ausgangsgleichung $x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x = 0$. Durch Einsetzen in die Gleichung haben wir die “wirklichen” Lösungen $\{2, -2, -1, 0\}$ gefunden.

Der Graph der Polynomfunktion 4. Grades $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$ zeigt die Nullstellen.

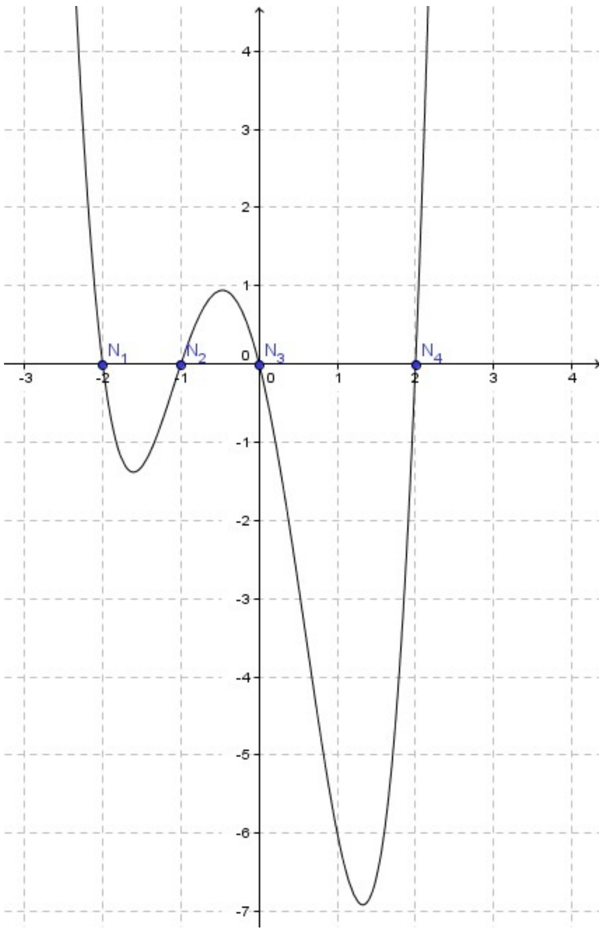

Abbildung 1: Nullstellen der Funktion $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$

4 Schlusswort

Die Cardanische Formel für kubische Gleichungen ist zwar nicht unbedingt schwierig zu merken, allerdings liefert sie nicht für jede Gleichung eine zufriedenstellende Lösung. Dies könnte, unserer Meinung nach, ein Grund sein, warum diese Formel im Schulstoff eher kaum auftaucht. Wir glauben auch, dass die Herleitung dieser Formel über den Schulstoff hinausgeht und dass es für Schülerinnen und Schüler besser ist, ein Verfahren zu kennen, welches sie verstehen, als nur mit einer Formel zu rechnen.

Das Lösungsprozedere, welches für Gleichungen vierten Grades vorgestellt wurde, finden wir für die Schule ebenfalls weniger brauchbar, da es sehr formellastig ist und nur wenig Einblick in die Lösungsstrategie gewährt.

Wir können uns aber vorstellen, dass diese Themen in einem Wahlfach mit Mathematik-interessierten Schülerinnen und Schüler behandelt werden könnten.