Übungen zur Diskreten Mathematik, WS 18/19

Blatt 8, 8.1.2019

36. Es seien k, $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Kreise der Länge k enthält der vollständige Graph K_n?

37.

(a) Gegeben ist ein Baum, der je einen Knoten vom Grad 2, 3, 5, 7 und 8 besitzt, und sonst nur Blätter hat. Wie viele Blätter und Knoten besitzt dieser Baum?

(b) Es sei $G = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$. Geben Sie eine Formel für die Anzahl der Blätter von G an, welche nur von den Anzahlen der Knoten von G, welche einen Grad größer als 2 haben, abhängt.

(c) Geben Sie (bis auf Isomorphie) alle Bäume an, die genau 4 Blätter (bzw. genau 5 Blätter) besitzen.

38. Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $|V| = n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Knoten von G so bezeichnen lassen, sodass $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist und für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt: der induzierte Teilgraph $G_i = G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ ist zusammenhängend.
Kann dabei $v_1 \in V$ beliebig vorgegeben werden?

(b) Es sei zusätzlich G ein Baum. Zeigen Sie, dass sich die Knoten von G so bezeichnen lassen, sodass für jedes $1 \leq i \leq n-1$ gilt: v_{i+1} besitzt einen Nachbarn in der Menge $\{v_1, \ldots, v_i\}$.

39*. Das Komplement eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^c = (V, E^c)$ mit

$$E^c = \Big\{\{v, w\} \in \mathcal{P}(V) \;\mid\; v \neq w\Big\} \setminus E \quad ,$$

d.h.: G^c enthält genau alle Kanten zwischen Knoten aus V, die nicht zu E gehören.

Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Bäume, deren Komplement nicht zusammenhängend ist.

40. Für m, $n \in \mathbb{N}$ ist $K_{m,n}$ der vollständige, bipartite Graph (vgl. Vorlesung §3, Beispiel 1.e).

(a) Bestimmen Sie alle $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, für welche $K_{m,n}$ eine Eulertour besitzt.

(b) Bestimmen Sie alle $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, für welche $K_{m,n}$ einen Hamiltonkreis besitzt.