Übungen zur Diskreten Mathematik, WS 18/19

Blatt 6, 27.11.2018

26.

(a) Bestimmen Sie den Koeffizienten von $a^3bd^6e^2$ in $(a+b+c+d+e)^{12}$.
Welche Potenzprodukte $a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3}d^{k_4}e^{k_5}$ haben in $(a+b+c+d+e)^{12}$ den kleinsten (bzw. größten) Koeffizienten?

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \mathbb{N}$ gegeben. Bestimmen Sie das größte Element von

$$\left\{ \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} \mid (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}_0^r,\ k_1 + \ldots + k_r = n \right\} \quad .$$

Tipp: Zeigen Sie zuerst: Gilt $|k_i - k_j| \geq 2$ für $1 \leq i \neq j \leq r$, so ist $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ nicht maximal.

27. Wieviele natürliche Zahlen $n \leq 500$ gibt es, die weder ein Vielfaches von 3, noch ein Vielfaches von 5, noch ein Vielfaches von 7 sind?

28. 8 Personen beschließen, zu Weihnachten zu wichteln. Dabei wird jeder Person eine andere (!) Person zugeordnet, die sie beschenken soll, und jede Person soll beschenkt werden. Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen Zuordnungen.

29. Es seien $a_1, \ldots, a_{41} \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ paarweise verschiedene Zahlen. Zeigen Sie, dass es mindestens 9 Indexpaare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq 41$ gibt, für welche $|a_i - a_j|$ denselben Wert annimmt.

Bleibt das Ergebnis auch richtig, wenn man erlaubt, dass auch gleiche a_i auftreten können?

30. Ein Eissalon bietet 6 Eissorten mit Fruchtgeschmack und 5 Eissorten mit anderem Geschmack an. Ein gemischtes Eis im Glas besteht aus 3 Eiskugeln (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge), eine Riesentüte besteht aus 3 Eiskugeln übereinander (mit Berücksichtigung der Reihenfolge).

Geben Sie an, wieviele verschiedene Möglichkeiten es gibt, ein Eis im Glas (bzw. eine Riesentüte) zu zubereiten, wenn

(a) die 3 verwendeten Eissorten verschieden sein müssen;

(b) unter den 3 Kugeln auch gleiche Eissorten vorkommen dürfen;

(c) Genau eine Kugel keinen Fruchtgeschmack haben darf;

(d) mindestens eine Kugel einen Fruchtgeschmack haben soll.