Übungen zur Diskreten Mathematik, WS 18/19

Blatt 4, 13.11.2018

16. Es sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Auf A definieren wir eine Relation $\sim_f$ durch

$$a_1 \sim_f a_2 \iff f(a_1) = f(a_2)$$

für alle $a_1,\, a_2 \in A$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim_f$ eine Äquivalenzrelation auf A ist und geben Sie die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim_f$ an.

(b) Es sei $\pi\colon A \to A/{\sim_f}$ die (surjektvie) Quotientenabbildung (vgl. Vorlesung, §1, Beispiel 6). Zeigen Sie: es gibt genau eine Abbildung $f_0\colon A/{\sim_f} \to B$ mit $f = f_0 \circ \pi$. Ist f_0 injektiv?

(c) Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Zeigen Sie, dass es eine Menge B und eine Funktion $f\colon A \to B$ mit $\sim = \sim_f$ gibt.

17. Wir möchten die vier Wände eines Zimmers streichen, jede einzelne Wand in einer Farbe. Hierzu stehen uns fünf verschiedene Farben zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Zimmer farblich zu gestalten, falls

(a) vier verschiedene Farben verwendet werden sollen,

(b) die Farben gegenüberliegender Wände gleich sein sollen,

(c) mindestens drei Farben verwendet werden sollen,

(d) maximal drei Farben verwendet werden sollen ?

Lösen Sie diese Aufgaben, indem Sie die Anzahl von Funktionen mit geeigneten Eigenschaften bestimmen.

18. Jeder Mensch bestitzt weniger als 150000 Haare auf seinem Kopf. Gibt es in einer Großstadt mit mehr als 6 Millionen Einwohnern 40 Personen, die dieselbe Anzahl von Kopfhaaren besitzen?

Welches Ergebnis der Vorlesung verwenden Sie für Ihre Argumentation?

19. Beweisen Sie den Satz von Ramsey (Vorlesung: §2, Korollar 1.b).

20.* Es sei $M = \{1, 2, \dots, 100\}$ und A eine Teilmenge von M mit 55 Elementen. Zeigen Sie, dass es $a,\, b \in A$ mit $a - b = 9$ gibt.

Gilt dies auch für Teilmengen A mit 54 Elementen?