Übungen zur Diskreten Mathematik, WS 18/19

Blatt 11, 29.1.2019

51. Es seien a, $b \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(a,b) = 1$ und $a + b \equiv 1 \mod (2)$. Zeigen Sie $\operatorname{ggT}(a^2 + b^2, a + b) = 1$.

52. Die Zahl $a \in \mathbb{N}$ habe die Dezimaldarstellung

$$a = \sum_{k=0}^{n} z_k 10^k$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $z_0, \ldots, z_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Zeigen Sie

$$a \equiv \sum_{k=0}^{n} z_k \mod (9)$$
$$a \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k z_k \mod (11) \quad .$$

Formulieren Sie Regeln für die Teilbarkeit natürlicher Zahlen durch 3, 9, 11!

Zusatz: Formulieren Sie ähnliche Ergebnisse für die Teilbarkeit durch t für alle $t \in T(10)$ bzw. $t \in T(100)$!

53. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}/(15)$ für welche

$$x \odot x \oplus \bar{6} \odot x \oplus \bar{5} = \bar{0}$$

gilt.

54. Stellen Sie fest, ob es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$123a \equiv 1 \mod (1792)$$

gibt. Falls ja, bestimmen Sie ein solches a (Hinweis: Erweiterter Euklid'scher Algorithmus).

55. Es seien $m \in \mathbb{N}$ und a, c, $t \in \mathbb{Z}$ mit $t \neq 0$. Zeigen Sie:

(a)

$$at \equiv ct \mod (m) \iff a \equiv c \mod \left(\frac{m}{\operatorname{ggT}(t,m)} \right) \quad .$$

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, für welche

$$1230x \equiv 800 \mod (17920)$$

gilt.