Elementare Zahlentheorie, SS 19

Blatt 8, 14.5.2019

36. (a) Bestimmen Sie alle Primzahlen und alle Primzahlzwillinge in $(100, 200]$.

(b) Bestimmem Sie die Anzahl aller Primzahlen ≤ 10000. Sie können dazu natürlich einen Computer benutzen.

37. Für $n \in \mathbb{N}^+$ sei p_n die n-te Primzahl, wenn wir die Primzahlen der Größe nach ordnen. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}^+$:

$$p_n \leq 2^{2^{n-1}} \ (= 2^{(2^{n-1})}) \quad .$$

Hinweis: Verwenden Sie Induktion und die Idee aus dem Beweis von Satz 2.2.1

38. Es seien $p \in \mathbb{P}$ und $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Zeigen Sie, dass p den Binomialkoeffizienten $\binom{p}{k}$ teilt.

39. (a) Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 38 den kleinen Satz von Fermat: Sind $p \in \mathbb{P}$ und $a \in \mathbb{Z}$ so gilt $p \mid a^p - a$. Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $a \in \mathbb{N}$ und machen Sie eine Induktion.

(b) Es seien wieder $a \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{P}$. Zeigen Sie $p \mid a^{p-1} - 1$, falls $p \nmid a$.