Elementare Zahlentheorie, SS 19

Blatt 7, 7.5.2019

31. Schreiben Sie 14704613 als Produkt von Primzahlen.

32. Seien a, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^+$ und $p \in \mathbb{P}$. Zeigen Sie:

(a) $p \mid a^n \Rightarrow p^n \mid a^n$.

(b) Es gelte $\mathrm{ggT}(a, b) = p$. Bestimmen Sie die möglichen Werte von

$$\mathrm{ggT}(a^2, b^2), \quad \mathrm{ggT}(a^2, b), \quad \mathrm{ggT}(a^3, b^2) \quad .$$

33. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

(a) $2^k - 1 \in \mathbb{P} \Rightarrow k \in \mathbb{P}$.

(b) $2^k + 1 \in \mathbb{P} \Rightarrow k = 2^l$ mit $l \in \mathbb{N}_0$.

34. Seien p, q zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass $\sqrt{pq}$ irrational ist.

35. Wir setzen $H = \{4n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 5, 9, 13, \ldots\}$.

(a) Zeigen Sie $h_1 h_2 \in H$ für alle h_1, $h_2 \in H$.

(b) Es seien h_1, $h_2 \in H$. Dann heißt h_1 ein Teiler von h_2 in H, falls es $h_3 \in H$ mit $h_2 = h_1 h_3$ gibt (Schreibweise: $h_1 \mid_H h_2$). $h \in H$ heißt eine H–Primzahl, falls $h \neq 1$ und falls

$$\{u \in H \mid u \mid_H h\} = \{1, h\}$$

gilt. Zeigen Sie, dass jedes $h \in H$ ein Produkt von H–Primzahlen ist.

(c) Zeigen Sie, dass 9, 21, 49 H–Primzahlen sind.

(d) Die Zahl $441 \in H$ hat zwei verschiedene Darstellungen als Produkt von H–Primzahlen.